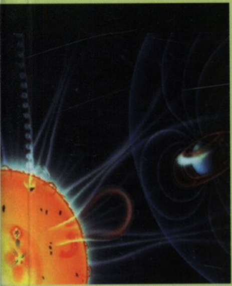
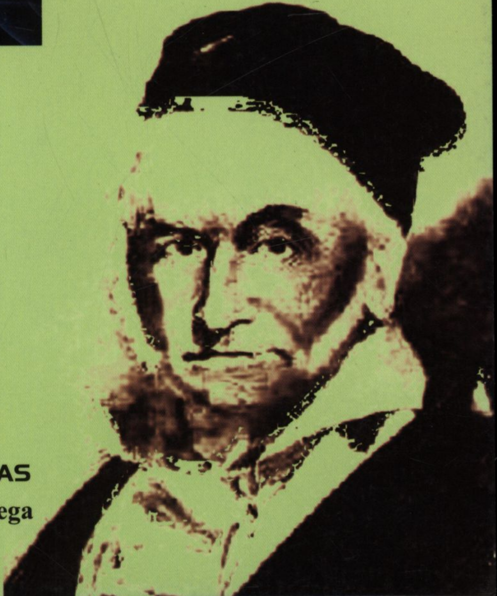
VIAJEROS DEL CONOCIMIENTO

EL DEVELADOR DE LAS INCÓGNITAS

Carl F. Gauss



Francisco Noreña



COLCIENCIAS

Alfaomega

Gauss, Carlos Federico, 1777-1855
Matemáticos - Biografías

Viajeros del conocimiento

Colección dirigida por
Victoria Schussheim

El develador de las incógnitas

Cubierta: Alfaomega Colombiana S.A.

Edición original publicada por
PANGEA EDITORES

ISBN 968-6177-12-4

Para esta edición autorizada para
COLCIENCIAS en Colombia:

ISBN 958-682-503-5

Impreso y hecho en Colombia
Printed and made in Colombia

El develador de las incógnitas

Carl Friedrich Gauss

Francisco Noreña

COLCIENCIAS

Alfaomega

A Paco y Puerto,
una pareja fuera
de lo común.

Índice

El mundo de Gauss

Una pequeña anécdota

Durante una visita turística a Gotinga, Alemania, un amigo y yo tomamos uno de esos típicos *tours* para darnos una idea de lo que había que ver en esa hermosa ciudad. Desde el principio del recorrido una joven española, estudiante de matemáticas, preguntaba al guía con bastante frecuencia, y en un pésimo inglés, si visitaríamos la casa de Gauss. La chica obtuvo repetidamente la evasiva respuesta "a ver si da tiempo". Ya casi al final del paseo, que duró prácticamente todo el día, el guía, un poco harto, viendo que habíamos hecho amistad con aquella mujer, se acercó a preguntarnos discretamente: "¿Qué es lo que quiere su hermosa amiga?" "Quiere saber si vamos a visitar la casa de Gauss", le respondimos en un inglés menos torpe que el de la joven. Entonces el guía, asombrado, se acercó más a nosotros y preguntó en voz baja: "¿Y quién es ese tal Gauss?" Le respondimos que había sido uno de los matemáticos más importantes de todos los tiempos. En ese momento la expresión ceñuda de aquel ilustrado hombre cambió por una más relajada y exclamó: "¡Ah, bueno! ¿A quién le interesan los matemáticos?"

La pregunta que se hizo nuestro guía turístico primermundista es muy sintomática; en realidad, a poca gente le interesa cualquier cosa relacionada con la ciencia.

Es probable que nuestro amigo lector no piense como ese guía turístico, porque al menos ya tiene este libro en las manos, aunque también puede ser que lo tenga porque se lo dejaron leer en la escuela, lo cual le produce un tedio inimaginable. De cualquier manera, intentaremos mostrarle algunos aspectos de la vida y de la obra de Johann Friedrich Carl Gauss, tratando de destacar lo que al propio Gauss más asombraba: que los descubrimientos en matemáticas, por más abstractos que parezcan en principio, son los que nos ayudan en esencia a describir la naturaleza y por lo tanto a entenderla y manipularla. En buena medida debemos a las matemáticas, y por ende a los matemáticos, el desarrollo tecnológico actual y las comodidades de que gozamos, así como nuestras concepciones del mundo en que vivimos.

En el salón de clases

Era una mañana común y corriente en una escuela como cualquier otra. El profesor, ante un grupo de niños de alrededor de 10 años de edad, estaba molesto por algún mal comportamiento del grupo y decidió poner a trabajar a sus alumnos en un problema de matemáticas que según él les llevaría un buen rato terminar; así, de paso, podría descansar un poco. En esa época se acostumbraba que los niños llevaran una pequeña pizarra en la cual hacían sus ejercicios. El maestro dijo a sus alumnos que según fueran terminando el problema dejaran las pizarras boca abajo sobre su escritorio, para que al terminar todos él revisara los resultados. El problema consistía en sumar los primeros cien números enteros, es decir, encontrar la suma de todos los números del 1 al 100.

A los pocos segundos de haber planteado el problema, se levantó un niño y depositó su pizarra sobre el escritorio del maestro. Éste, convencido de que aquel niño no quería trabajar, ni se molestó en ver el resultado; prefirió esperar

Carl Friedrich Gauss

a que todos terminaran. Un poco más de media hora después comenzaron a levantarse los demás niños para dejar su pizarra, hasta que finalmente todo el grupo terminó.

Para sorpresa del profesor, de todos los resultados el único correcto era el del muchacho que había entregado primero. Mandó llamar al chico y le preguntó si estaba seguro de su resultado y cómo lo había encontrado tan rápido. El niño respondió: "Mire, maestro, antes de empezar a sumar mecánicamente los cien primeros números me di cuenta de que si sumaba el primero y el último obtenía 101; al sumar el segundo y el penúltimo también se obtiene 101, al igual que al sumar el tercero y el antepenúltimo, y así sucesivamente hasta llegar a los dos números centrales que son 50 y 51, que también suman 101. Entonces lo que hice fue multiplicar 101 por 50 para obtener mi resultado de 5 050."

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 98 + 99 + 100 = ?$$

$$\begin{array}{rl}
1 + 100 = 101 & \\
2 + 99 = 101 & \\
3 + 98 = 101 & \\
4 + 97 = 101 & \\
\ldots & \qquad 50 \text{ veces} \\
48 + 53 = 101 & \\
49 + 52 = 101 & \\
50 + 51 = 101 &
\end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 &= 50 \times 101 \\ &= 5\,050 \end{aligned}$$

En esa época ya se habían descubierto procedimientos para hacer sumas y otras operaciones con series de números arbitrariamente grandes. Lo sorprendente del caso es que un niño de 10 años se diera cuenta de cómo hacerlo.

Lo anterior ocurrió en Alemania en 1787 y por supuesto aquel niño genio era Gauss, quien durante toda su vida continuó mostrando su impresionante capacidad para las matemáticas.

Los primeros años

Gauss nació en la ciudad de Brunswick, Alemania, el 30 de abril de 1777. Su nombre de bautismo fue Johann Friedrich Carl Gauss, pero todos sus trabajos los firmó como Carl Friedrich Gauss. Nació en una familia muy pobre; su abuelo era un jardinero que se estableció en Brunswick, en 1740, y nunca logró superar la espantosa miseria que siempre cargó. El padre de Gauss, Gerhard Diedrich Gauss, se dedicó también a la jardinería y a la albañilería y construcción de canales. Aunque nada distinguió especialmente su vida, fuera de haber sido el padre de Gauss, era un hombre muy trabajador y honrado que logró sacar adelante a su familia y mantenerla en un estado bastante mejor que la de su padre. Era un hombre muy rudo en todos los aspectos y podía decirse que la disciplina que imponía a su familia a veces rayaba en la brutalidad. Si por su padre fuera, Gauss habría seguido alguna de las profesiones familiares, cosa que no ocurrió gracias a una serie de afortunados incidentes. De pequeño Gauss fue respetuoso y obediente, y aunque después nunca criticó a su padre, es notorio que no sintió por él un verdadero cariño. Poco antes de que Gauss cumpliera los 30 años, su padre murió.

Todo parece indicar que el genio de Gauss y sus primeros estímulos intelectuales provienen de la familia materna. Desde el momento de su nacimiento Gauss fue el orgullo de su madre, Dorothea Benz, mujer alegre y optimista, de aguda inteligencia, que notó muy pronto que su hijo era algo especial y lo protegió hábilmente de las intenciones del padre de hacerlo jardinero o albañil. Siempre esperó grandes cosas de su hijo, y no estaba equivocada. A él nunca le importó la fama, pero para su madre los triunfos de Gauss fueron su vida.

Gauss siempre estuvo muy cerca de su madre y hubo mucha comprensión entre ellos, al grado de que vivió con ella los últimos 22 años de su existencia; nunca permitió que nadie se hiciera cargo de ella y la cuidó hasta el final. Dorothea Benz murió ciega a los 97 años de edad, cuando Gauss tenía ya 62.

El hermano menor de Dorothea, Friedrich Benz, fue muy importante para Gauss en su juventud. Por problemas económicos ejercía el oficio de tejedor, pero era un hombre muy inteligente y con muchas inquietudes intelectuales. Al ver en su sobrino una mente afín a la suya, hizo cuanto pudo por despertar en él muchas inquietudes y estimular su lógica e inteligencia. El tío Friedrich murió muy joven, pero Gauss, quien poseía una memoria fotográfica que le permitió acordarse de todos los detalles de su niñez hasta los últimos días de su vida, recordaba perfectamente sus enseñanzas y lo consideraba muy importante en su vida.

Desde muy pequeño Gauss mostró su talento para los números y para el lenguaje. Aprendió a leer solo, y sin que nadie le hablara de aritmética conocía los números desde muy temprana edad. Cuentan que un sábado por la tarde su padre estaba haciendo cuentas para pagarle a los trabajadores que tenía a su servicio. El pequeño Gauss, entonces de tres años, lo observaba con extrema atención, y al terminar su padre aquellas largas cuentas, el niño le hizo ver que se había equivocado en una operación y le dijo cuál era el resultado correcto.

Ya en su edad adulta a Gauss le gustaba presumir de que había aprendido a contar antes que a hablar. Quizás exageraba para divertirse con la reacción de los demás, pero lo que sí es cierto es que conservó siempre una prodigiosa capacidad para hacer cálculos mentales.

No se sabe con precisión la fecha en que ocurrió, pero hubo un incidente cuando Gauss era muy pequeño que estuvo a punto de ocasionar una grave pérdida para el desarrollo de las matemáticas y de la ciencia en general. Estaba Gauss jugando cerca de su casa junto a un canal que por ahí pasaba; se vino una crecida primaveral del canal y el niño casi se ahogó: afortunadamente en ese momento pasaba por ese lugar un labrador que vio al pequeño en peligro y lo rescató.

Probablemente aquel hombre nunca llegó a enterarse de la clase de niño que había salvado.

A los siete años Gauss ingresó a la escuela primaria en su natal Brunswick. Era una escuela con disciplina medieval, regida por un tal Buttner que tenía aterrorizados a los alumnos con sus métodos de enseñanza. De cualquier forma fue allí donde el tímido y obediente Gauss empezó a abrirse camino y a darse a conocer en ámbitos más amplios. Durante los primeros años no ocurrió nada extraordinario, pero fue ahí donde a los 10 años de edad Gauss resolvió en pocos segundos el problema de sumar los primeros cien números. Precisamente era Buttner el maestro de Gauss, y pese a su mal carácter y a sus métodos terroristas de enseñanza, quedó muy asombrado de Gauss y a partir de ese momento lo trató, al menos a él, como a un ser humano. No sólo eso, sino que con su propio dinero le compró un manual de aritmética y se lo regaló; al ver cómo Gauss lo estudiaba y lo asimilaba rápidamente Buttner dijo: "Es superior a mí, no tengo nada que enseñarle."

A partir de entonces Buttner encargó a un ayudante suyo, muy brillante, la tarea de supervisar y ayudar a Gauss en sus estudios autodidactas. Era un joven llamado Johann Martin Bartels, al que le apasionaban las matemáticas; él y Gauss congeniaron muy bien y el ayudante de 17 años y el alumno de 10 se hicieron muy amigos para toda la vida.

La adolescencia

Desde que Gauss conoció a Bartels sus progresos en matemáticas se aceleraron. Ambos estudiaban juntos, se apoyaban y se ayudaban mucho para descifrar y entender los manuales de álgebra y de análisis elemental que tenían. En estos años se empezaron a gestar algunas de las ideas y formas de ver las matemáticas que caracterizaron posteriormente a Gauss. Se dio cuenta, por ejemplo, del poco rigor en muchas de las demostraciones de los grandes matemáticos que lo precedieron, como Newton, Euler, Lagrange y otros, sobre todo en el campo del análisis. Precisamente fue el rigor en las demostraciones una de las características esenciales de Gauss, así como de las matemáticas en general a partir de su tiempo.

A los 12 años ya miraba con cierto recelo los fundamentos de la geometría, y a los 16 tuvo sus primeras ideas intuitivas sobre la posibilidad de otro tipo de geometría, diferente de la de Euclides. A los 17 años Gauss se dio a la tarea de completar lo que a su juicio habían dejado a medias sus predecesores en materia de teoría de números. Así descubrió su pasión por la aritmética, área en la que poco después obtuvo sus primeros triunfos. Su gusto por los números, es decir, por la aritmética, que prevaleció durante toda su vida, aunque se dedicó a muchas otras cosas, se refleja en que para él "la matemática es la reina de las ciencias y la aritmética es la reina de las matemáticas".

Además de haber representado un buen incentivo para Gauss, Bartels tenía relación con algunos hombres influyentes de Brunswick, quienes al conocer a Gauss no dudaron en presentárselo a Carl Wilhelm Ferdinand, duque de Brunswick. Gauss tenía 14 años cuando conoció al duque Ferdinand; éste quedó fascinado por lo que había oído del muchacho y por su modestia y timidez. Decidió solventar todos los gastos de Gauss para asegurar que su educación llegara a buen fin. Así Gauss consiguió a su mecenas y no tuvo que preocuparse de lo económico durante un buen rato.

Al año siguiente de conocer al duque, Gauss ingresó al Colegio Carolino para continuar sus estudios. En esa época otro de los aspectos que sorprendieron a sus maestros y compañeros fue su increíble facilidad para las lenguas. Aprendió y dominó el griego y el latín en poquísimo tiempo. De hecho, Gauss, durante ese periodo, dudaba entre dedicarse a las matemáticas o al estudio de la filología. En esa época estudió a fondo las obras de Newton, de Lagrange, de Euler, etcétera, y a su vez empezó sus investigaciones en teoría de números, que pronto lo harían famoso.

Estuvo tres años en el Colegio Carolino, y al salir seguía sin tener claro aún si dedicaría su vida a las matemáticas o a la filología. En esta época ya había descubierto su ley de los mínimos cuadrados, que describiremos más adelante. Este trabajo marca el comienzo del interés de Gauss por la teoría de errores de observación y su distribución. Para muchos es familiar hoy la curva llamada campana de Gauss, emanada de esta teoría.

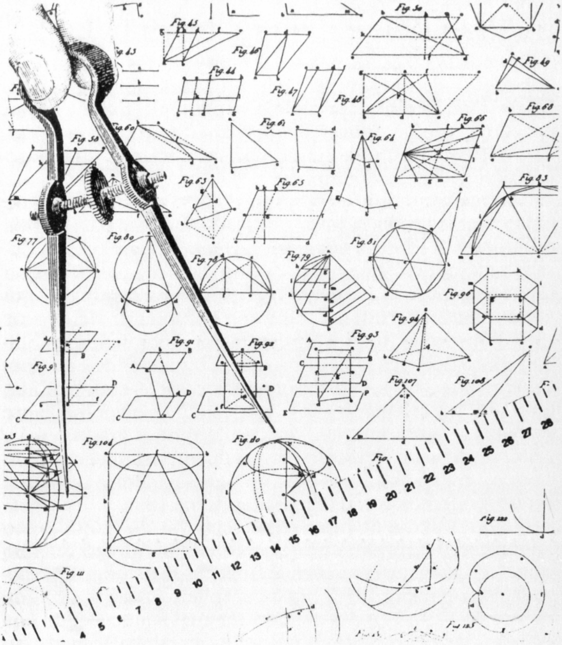
Decisión por las matemáticas

Al terminar sus estudios en el Colegio Carolino, Gauss pensó mucho dónde debería seguir estudiando. Después de averiguar y platicar con sus conocidos, lo que le hizo decidir fue simplemente la excelente biblioteca que había en la Universidad de Gotinga, también en Alemania. Se mudó a esa ciudad y comenzó sus estudios aún sin haber decidido a qué quería dedicar su vida. La biblioteca le permitió avanzar mucho en sus investigaciones aritméticas y en sus estudios filológicos, y no fue sino hasta después de dos años de estancia en Gotinga que por fin se decidió definitivamente en favor de las matemáticas. Lo que precipitó su decisión y provocó que la filología perdiera para siempre a un excelente hombre fue su descubrimiento de que es posible construir, usando únicamente regla y compás, un polígono regular de 17 lados.

Los problemas de construcción con regla y compás fueron planteados por los griegos en la época de Euclides. En esos tiempos se resolvieron algunos de ellos, como la construcción de los polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 10 y 12 lados, entre otros. Sin embargo, quedaron sin solución otros problemas, tres de ellos muy famosos –la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo– y otros como la construcción de algunos polígonos regulares como el de siete lados. Puede decirse que desde esa época hasta la de Gauss no hubo ningún avance, aunque sí muchos intentos en el terreno de las construcciones geométricas con regla y compás. La importancia del descubrimiento de Gauss va mucho más allá de la construcción de un polígono de 17 lados. Para empezar, transformó el problema en uno aritmético y algebraico, y demostró que los únicos polígonos regulares, con un número primo de lados, p, que pueden construirse con regla y compás son aquellos que cumplan con que $p-1$ sea una potencia de 2. Para aclarar mejor esto, veamos cuáles son los primeros polígonos con un número primo de lados que pueden construirse, según el resultado de Gauss:

$p = 3$	$3 - 1 = 2 = 2^1$	sí es construible
$p = 5$	$5 - 1 = 4 = 2^2$	sí es construible
$p = 7$	$7 - 1 = 6$	no es construible puesto que 6 no es potencia de 2
$p = 11$	$11 - 1 = 10$	no es construible
$p = 13$	$13 - 1 = 12$	no es construible
$p = 17$	$17 - 1 = 16 = 2^4$	sí es construible, ya que 16 es 2 elevado a la cuarta potencia

Los siguientes números primos que sí cumplen la condición de Gauss para que el polígono regular correspondiente sea construible con regla y compás resultan ser $p = 257$ y $p = 65\,537$:



Desde la época de Euclides, los geómetras se dedicaron a resolver problemas de construcción con regla y compás.

$$p - 1 = 256 = 2^8 \text{ y } p - 1 = 65\,536 = 2^{16}$$

Como vemos en la lista anterior, mucho antes de Gauss ya se sabían construir los primeros dos polígonos, es decir, el triángulo y el pentágono. Pero el resultado al que llegó el matemático tiene varias consecuencias: demuestra que los polígonos de 7, 11 y 13 lados son imposibles de construir con regla y compás, y que el de 17 sí es posible. Aunque a Gauss le importaba el problema en general, en este caso se preocupó por encontrar la forma concreta en que se puede construir un polígono regular de 17 lados utilizando únicamente regla y compás.

Un aspecto muy importante de este resultado es el de haber demostrado la imposibilidad de construir algunos polígonos. Ya no es necesario seguir buscando; está demostrado matemáticamente que no se puede construir con regla y compás el heptágono regular, por ejemplo. Aquí Gauss sentó precedente, tanto en la forma de demostrar esto como en inaugurar las demostraciones de imposibilidad. Poco después hubo otras demostraciones de este tipo: se demostró que los tres problemas clásicos eran también imposibles y asimismo que es imposible resolver mediante raíces las ecuaciones algebraicas de quinto grado o más. Algunas de estas demostraciones de imposibilidad dieron origen a nuevos campos de investigación dentro de lo que hoy conocemos como álgebra moderna.

Como ya mencionamos, a Gauss le dio tanto gusto hacer ese descubrimiento que en ese momento decidió que dedicaría su vida a las matemáticas. Esto ocurrió exactamente un mes antes de que cumpliera 20 años, el 30 de marzo de 1797. El estudio de las lenguas siguió siendo una de sus diversiones, pero su decisión estaba tomada: su vocación era la de matemático.

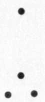
Ese mismo día Gauss empezó un diario: en él apuntaba anotaciones muy específicas sobre los resultados que iba obteniendo. Aunque ha sido difícil descifrar algunas anotaciones, este diario científico ha sido muy importante para entender ciertos aspectos de la obra de Gauss, debido sobre todo a que no siempre publicaba sus trabajos y en el diario, aunque un poco en clave, pueden hallarse algunas de sus ideas y las fechas en que se le habían ocurrido. Son rarísimas en su diario –pero las hay–, las anotaciones personales que no tengan que ver con su trabajo científico.

Por supuesto, la primera anotación que aparece en el diario es relativa al descubrimiento de la construcción con regla y compás del polígono regular de 17 lados. Otras anotaciones involucraban resultados sumamente importantes para las matemáticas del siglo XIX; sin embargo, nunca los publicó, y después otros matemáticos los encontraron independientemente. Ocurrió en varias ocasiones que luego de que algún gran matemático de la época publicaba un resultado importante, Gauss comentaba con cierta arrogancia que esas ideas las había tenido él tiempo atrás. En algunos de estos casos el diario sirvió, después de la muerte de Gauss, para demostrar que tenía razón.

Como un ejemplo de las anotaciones que Gauss plasmó en su diario, casi en clave, mencionaremos la correspondiente al 10 de julio de 1796, que dice así:

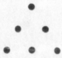
¡EUREKA! núm. = $\Delta + \Delta + \Delta$

donde después del eureka que hizo famoso Arquímedes al descubrir su principio de flotación, afirma que todo número natural puede expresarse como la suma de hasta tres números triangulares. Los números triangulares son aquellos que resultan de formar triángulos equiláteros con puntos de la siguiente manera:

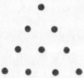


1

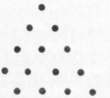
3



6



10



15

Una manera más formal de definir los números triangulares es decir que son aquellos de la forma $\frac{n(n+1)}{2}$, donde n es un número natural.

¿Por qué Gauss no publicaba todos sus resultados, o a veces tardaba mucho en hacerlo? Hablando de sí mismo, dijo que emprendía sus estudios científicos tan sólo como una respuesta a los impulsos más profundos de la naturaleza, y para él era algo completamente secundario publicarlos para el conocimiento de los demás. Otro juicio de Gauss, comunicado en una ocasión a un amigo, explica tanto su diario como la lentitud en la publicación de sus trabajos; afirmaba que cuando tenía 20 años era tal la cantidad de nuevas ideas que pasaban por su cabeza que difícilmente podía recogerlas, y sólo disponía para ello de brevísimo tiempo. El diario no contiene más que los escuetos juicios finales de los resultados de complicadas investigaciones, algunas de las cuales lo ocuparon durante semanas.

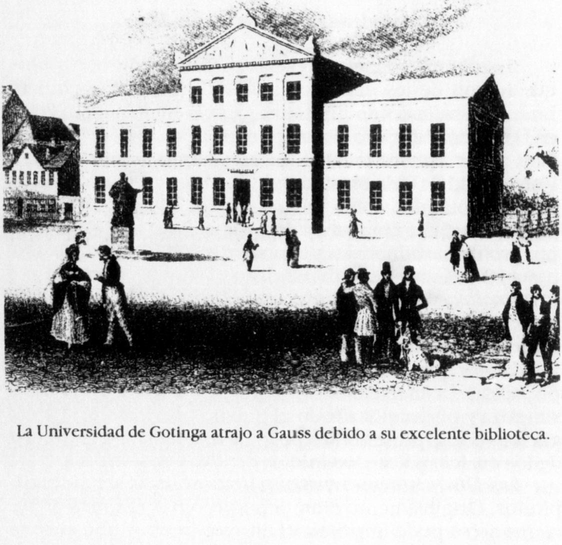
Cuando en su juventud estudiaba la serie de demostraciones matemáticas de Arquímedes y Newton, Gauss decidió seguir su gran ejemplo y dejar sólo obras perfectas y completas a las que nada pudiera añadirse ni restarse sin desfigurar el conjunto. La obra por sí misma debe ser completa, sencilla y convincente, sin que pueda encontrarse signo alguno que indique el trabajo que ha costado lograrla. Una catedral, decía, no es una catedral hasta que ha desaparecido de la vista el último andamio. Trabajando con este ideal, Gauss prefería pulir una obra varias veces en vez de publicar los amplios esquemas de muchas de ellas, como hubiera podido hacer fácilmente. Su lema era: pocos pero maduros.

Las primeras obras maestras

La primera estancia de Gauss en Gotinga duró tres años, que fueron de los más productivos de su vida. Regresó a Brunswick a finales de 1798 sin haber obtenido ningún grado en la universidad, pero con su primera obra maestra casi lista. Para afinar algunos detalles de ésta, hizo varios viajes a la Universidad de Helmstedt, donde entabló amistad con profesores importantes, como Johann Friedrich Pfaff, quien le fue de gran ayuda. La obra estuvo lista a finales del año 1798, pero por problemas editoriales y financieros no fue publicada sino hasta 1801. Gauss la escribió en latín y la tituló *Disquisitiones arithmeticae*. Por supuesto, este libro está dedicado a su mecenas, el duque Ferdinand, por quien Gauss sentía mucho respeto y agradecimiento.

La obra resulta difícil de asimilar incluso para los especialistas. Es un tratado de la teoría de números en el que se sintetiza y perfecciona todo el trabajo previo en esta área; además Gauss presenta sus propios resultados, en muchos de los cuales radican los inicios de ideas posteriores.

Las *Disquisitiones arithmeticae* constan de siete capítulos. Originalmente eran ocho pero por razones financieras no se pudo imprimir el último. La frase que abre el prefacio describe el objeto general del libro: "Las investigaciones contenidas en esta obra pertenecen a aquella parte de las matemáticas que se refiere a los números enteros, sien-



La Universidad de Gotinga atrajo a Gauss debido a su excelente biblioteca.

do siempre excluidos los fraccionarios y los irracionales." Desde que se conoció este trabajo hasta nuestros días se considera a las *Disquisitiones arithmeticae* como una obra maestra de "la reina de las matemáticas", es decir, de la teoría de números.

Como ya mencionamos, al regresar Gauss de Gotinga a su ciudad natal no tenía ningún grado. Se había dedicado de lleno a sus investigaciones y no le preocuparon los detalles necesarios para obtener un título. Sin embargo, gracias a sus incursiones en la Universidad de Helmstedt y a su amistad con Pfaff, esta universidad le otorgó el grado de doctor *in absentia* en 1799 mediante la presentación de una disertación titulada *Demostratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus revolvi posse.* Esto significa algo así como *Una nueva prueba de que toda función algebraica racional entera de una variable puede ser descompuesta en factores reales de primero o segundo grado.*

A este resultado se lo conoce actualmente como teorema fundamental del álgebra, y se puede expresar de otra manera un poco más comprensible: Todo polinomio de una variable tiene al menos una raíz. Una raíz de un polinomio no es más que una solución de la ecuación que resulta al igualar el polinomio a cero. Por ejemplo, una raíz del polinomio de primer grado $p(x) = 5x - 10$ se obtiene resolviendo la ecuación

$$5x - 10 = 0$$

La solución es $x = 2$, y este número es una raíz del polinomio dado. Los actuales estudiantes de secundaria saben resolver ecuaciones de segundo grado, es decir, saben encontrar las raíces de los polinomios de segundo grado mediante la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula nos da las raíces del polinomio de segundo grado $p(x) = ax^2 + bx + c$.

Pues bien, el teorema fundamental del álgebra asegura que cualquier polinomio, sin importar de qué grado sea, tiene al menos una raíz. El grado de un polinomio o de una ecuación es el exponente más grande que tiene la variable, por ejemplo, el polinomio $p(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5x + 1$ es de grado 4, ya que 4 es el mayor de los exponentes que tiene la variable x, mientras que la ecuación $2x^5 - 7x^3 + 15 = 0$ es de grado 5. Por medio de otro resultado mucho más simple se sabe que de hecho un polinomio tiene n raíces, donde n es el grado del polinomio. Cuando hablamos de las raíces del polinomio, estamos aceptando la posibilidad de que sean números complejos, los que veremos con cierto detalle un poco más adelante.

Este teorema, como su nombre lo dice, es de fundamental importancia para el álgebra y para otras ramas de las matemáticas. Su demostración es bastante complicada y de hecho el trabajo de Gauss ¡tiene un error! El error está en el título: no debería haber puesto la palabra *nova* (en español "nueva"), ya que las "demostraciones" anteriores a él eran incompletas y con algunos errores, por lo que después se pudo ver que la de Gauss fue la primera demostración completa y correcta del teorema fundamental del álgebra. Posteriormente Gauss se dio el lujo de encontrar varias demostraciones completamente diferentes de este teorema, en las que queda de manifiesto su inmensa creatividad, su imaginación y su increíble facilidad para relacionar diferentes campos de la matemática.

Los números complejos

Al estudiar la primera demostración del teorema fundamental del álgebra queda claro que en ese entonces Gauss conocía muy bien las propiedades principales de los llamados números complejos, área en la que hizo grandes descubrimientos sin publicarlos, por lo que se les reconocen a otros autores.

Una buena parte del trabajo de Gauss en teoría de números y en otros temas de matemáticas puras está relacionada con los números complejos. Estos números fueron introducidos por primera vez por los algebristas del renacimiento al intentar resolver ecuaciones como

$$x^2 + 1 = 0$$

cuya solución sería x = (raíz cuadrada de −1). Como este número no existía se inventaron los números "imaginarios", que son aquellos de la forma bi donde b es cualquier número real e $i = \sqrt{-1}$. Los números complejos son las combinaciones de los números reales con los imaginarios, es decir, son todos los números de la forma $a + bi$. Originalmente a estos números se les asociaban propiedades místicas y mágicas, lo cual se deja ver desde la propia clasificación de reales o imaginarios. Un poco después de su descubrimiento, los números complejos seguían siendo vistos de esta manera. Por ejemplo, Leibniz decía que: "El Espíritu Divino encontró una salida en esa maravilla de análisis, ese portento del mundo ideal, ese anfibio entre ser y no ser, que llamamos la raíz imaginaria de la unidad negativa."

Esta actitud se fue perdiendo poco a poco y fue Gauss el primer matemático en hacer uso libre y extensivo de los números complejos y en aceptarlos como conceptos matemáticos genuinos. Desarrolló mucho la teoría de los números complejos: uno de los resultados más importantes de ella es el conocido como teorema de Cauchy, que Gauss había desarrollado y demostrado en 1811, antes que este matemático francés. Trabajó mucho con la representación geométrica de los números complejos en un plano cartesiano, donde la parte real de un número complejo *(a)* se grafica en el eje X y la parte imaginaria del número *(b)* se grafica en el eje Y. Las propiedades del conjunto de los números complejos son sorprendentes, y la aplicación práctica que se ha desprendido de estas propiedades es palpable en campos como la física y la ingeniería.

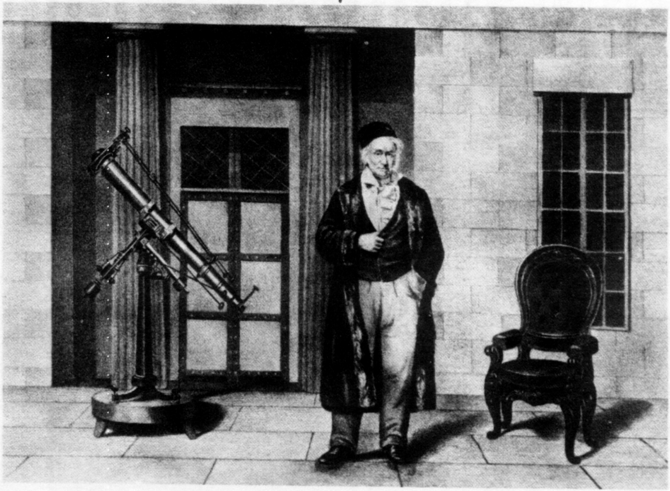
Actualmente, y gracias en parte a Gauss, los números complejos son tan "reales" como los reales, y mantenemos el desafortunado nombre de números imaginarios por razones históricas y por la fuerza de la costumbre.

La órbita de Ceres

Poco después de su regreso a Brunswick los intereses de Gauss dieron un giro y comenzó a llamarle la atención un problema de astronomía, el de la órbita de Ceres.

Hasta finales del siglo XVIII se conocían siete planetas, el último de ellos, Urano, descubierto apenas en 1781 por William Herschel.* En esa época había una relación numérica entre las distancias de los planetas, conocida como ley de Bode, que había sido confirmada con el reciente descubrimiento de Urano. Sin embargo, según dicha ley había un hueco entre Marte y Júpiter donde "debía haber otro planeta, el octavo del sistema solar". Pese a la opinión del famoso filósofo Hegel, de que era una tontería buscar un octavo planeta cuando existían razones filosóficas para saber que el número de planetas debía ser siete, los astrónomos siguieron buscando su planeta faltante hasta que muy al principio del siglo XIX Giuseppe Piazzi descubrió un cuerpo al que se llamó Ceres, que hoy sabemos forma parte de un conjunto de miles de pequeños cuerpos denominados planetas menores o asteroides, que constituyen un cinturón que se encuentra precisamente entre Marte y Júpiter. En cuanto se descubrió Ceres, había que determinar su órbita antes de que se perdiera de vista para saber dónde estaría en cualquier momento. Por su pequeño tamaño las

*Véase, en esta misma colección, *El naturalista de los cielos. William Herschel*, de Estrella Burgos.



Los logros astronómicos de Gauss lo llevaron a ser director del observatorio de la Universidad de Gotinga.

mediciones fueron poco precisas y pudo observárselo sólo tres veces. Los intentos por determinar esta órbita fueron fallidos hasta que hizo su aparición Gauss.

A Gauss le apasionó la idea de hacer uso de la ley de gravitación de uno de los científicos a quien más admiraba, Newton. A Ceres no le quedaba más que seguir fielmente esta ley. Lo que había que hacer era determinar las características de su órbita con base en las tres mediciones con las que se contaba. Aplicando a estos tres datos su principio de mínimos cuadrados, que había descubierto poco tiempo antes, determinó los parámetros orbitales de Ceres.

Sobre la base de las predicciones de Gauss, los astrónomos volvieron a localizar a Ceres en 1801 y en 1802. Posteriormente Gauss repitió su hazaña al determinar con mayor precisión, considerando la influencia de los demás planetas, la órbita de Pallas, otro asteroide recién descubierto. Estos éxitos científicos dieron mucha fama a Gauss, quien en 1807 fue nombrado profesor de astronomía y director del nuevo observatorio de la Universidad de Gotinga, ciudad en la que vivió hasta el final de su vida.

El método de mínimos cuadrados y la teoría de errores

Una versión extraordinariamente simplificada del método de mínimos cuadrados que descubrió Gauss y utilizó con éxito para determinar las órbitas de Ceres y de Pallas puede vislumbrarse en el siguiente ejemplo: dados tres puntos en el plano, ¿cuál es la ecuación de la línea recta que mejor se adapta a ellos? Usando el método de mínimos cuadrados podemos determinar la pendiente y la ordenada al origen de la mejor recta. La forma de hacerlo es mediante unas fórmulas que se desprenden del principio de mínimos cuadrados, y la pendiente y ordenada halladas son el equivalente de los parámetros orbitales que encontró Gauss, con los que predijo correctamente la posición de Ceres.

No sabemos en realidad si fue Gauss el primero en proponer el principio de mínimos cuadrados. Como trabajo publicado fue Legendre el primero en plantearlo; sin embargo, Gauss afirmó que él lo había concebido desde antes. No podemos saber esto a ciencia cierta, pero lo importante es que Gauss lo utilizó mucho y lo perfeccionó a lo largo de su vida. Lo aplicó no sólo a problemas de astronomía como el de la órbita de Ceres, sino también a problemas de mediciones geodésicas, de meteorología, de física y en otras ramas de las propias matemáticas.

En relación con la técnica de mínimos cuadrados Gauss presentó un estudio de cómo pueden representarse las variaciones o errores emanados de las mediciones experimentales mediante una curva en forma de campana, llamada hoy distribución de Gauss o simplemente campana de Gauss. La rama de la ciencia a la que pertenece esto se conoce como teoría de errores; su importancia radica en que toda ciencia experimental requiere mediciones y, al hacerlas, nunca son exactas, es decir, siempre se mide con cierto error, debido a diferentes aspectos, como la precisión de los aparatos, errores estadísticos, etcétera. Del tratamiento correcto de estos errores depende el éxito de una investigación.

Ya antes de Gauss hubo científicos que se dieron cuenta de la necesidad de manejar adecuadamente los errores y del tratamiento correcto de grupos muy grandes de datos experimentales. Se puede mencionar a Bernoulli y a Euler, pero el que empezó a trabajar en esto en serio y obtuvo resultados importantes fue sin lugar a dudas Laplace. Hoy podemos afirmar que el trabajo de éste, junto con el de Gauss, conforma lo que podríamos llamar la teoría clásica de errores.

Al regresar a Brunswick fue cuando Gauss mostró por primera vez interés por la aplicación de las matemáticas, en este caso a problemas concretos de mecánica celeste. Todo su trabajo astronómico de esta época y algunos de los métodos matemáticos empleados, como el de los mínimos cuadrados y la teoría de errores, culminaron con la publicación, en 1809, de su obra *Theoria motus corporum coelestium sectionibus conicis Solem ambientium* que puede traducirse como *Teoría del movimiento de los cuerpos celestes que se mueven alrededor del Sol en secciones cónicas.*

Ésta es otra de las obras maestras de Gauss que sí publicó, por lo que debe haberla considerado terminada y perfecta. Con pequeñas modificaciones esta obra se utiliza hoy en día para realizar ciertos cálculos astronómicos con computadora. Un detalle curioso de este trabajo es que entre los métodos matemáticos que describe y utiliza está lo que poco después se llamó series de Fourier, con las que pueden hacerse muchas cosas útiles en física teórica y experimental. Nuevamente Gauss parece haberse adelantado.

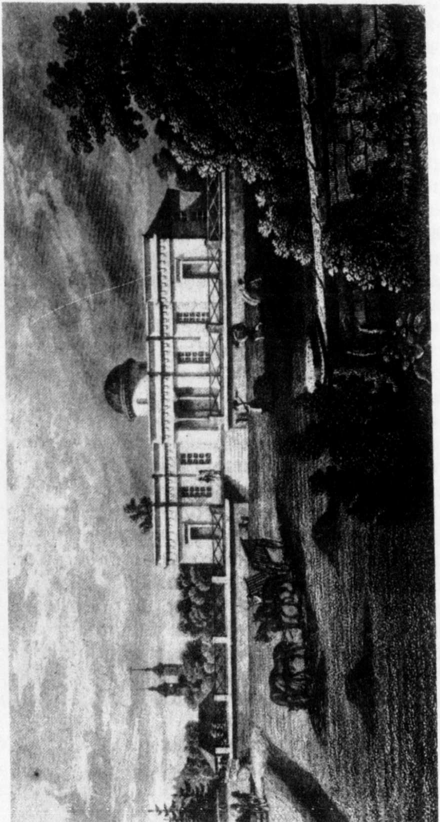
La fama de Gauss en esta época empezaba a crecer desmesuradamente. Cuando el barón de Humboldt le preguntó al célebre matemático y astrónomo francés Laplace quién era el matemático más grande de Alemania, éste respondió que era Pfaff. Al preguntarle Humboldt por Gauss, Laplace dijo: "No, Gauss es el más grande matemático del mundo."

La muerte del duque

Carl Wilhelm Ferdinand, duque de Brunswick, a quien Gauss vivió eternamente agradecido por su invaluable e incondicional apoyo, no sólo fue un protector inteligente de los jóvenes de talento y un cordial gobernante, sino también un buen soldado. Federico el Grande lo admiró y estimó mucho por la bravura y el genio militar que mostró durante la guerra de los siete años, que ocurrió entre 1756 y 1763. A los 70 años de edad el duque Ferdinand fue nombrado jefe de las fuerzas prusianas en un intento desesperado por detener a los franceses, comandados ni más ni menos que por Napoléon. Poco antes el duque había ido en vano en una misión a San Petersburgo para pedir ayuda rusa para Alemania, ante la inminente invasión francesa. Ferdinand enfrentó a los franceses en su marcha hacia Saale, pero fue contundentemente derrotado, hecho prisionero y herido de muerte. Una delegación de Brunswick fue a Halle, donde en ese tiempo tenía su base Napoleón, para implorar la generosidad del emperador ante el anciano moribundo a quien había derrotado. Napoleón no sólo se negó a la gracia, sino que ridiculizó a su honroso enemigo riéndose de su capacidad militar. La humillada delegación no pudo hacer nada por el anciano en prisión. El duque murió el 10 de noviembre de 1806. Al enterarse, Gauss no comentó nada, ni lo hizo después; simplemente, según sus amigos y familiares cercanos, se volvió más reservado de lo que de por sí ya era.

Por la inmensa fama que en esos tiempos tenía Gauss no le fue difícil encontrar la forma de mantener a su familia ahora que había muerto su querido protector. Tuvo muchos ofrecimientos, algunos muy halagüeños, como el de ir a San Petersburgo a detentar el lugar de Euler, que desde la muerte de éste, en 1783, no había sido dignamente ocupado. En esta época Gauss tuvo su primer contacto con Alexander von Humboldt, explorador, científico y político muy capaz que tuvo que ver con el resurgimiento de Prusia después de la invasión francesa. Humboldt, junto con unos amigos influyentes y con el objeto de que Alemania no perdiera al más grande matemático del mundo, consiguió que a Gauss se le ofreciera ser profesor y director del observatorio astronómico de Gotinga, puesto que como ya habíamos mencionado Gauss aceptó. Al matemático nunca le gustó dar clases a estudiantes comunes, pero tuvo que hacerlo pues era parte de su obligación. Sin embargo, disfrutaba mucho enseñando sus ideas e intercambiando conocimientos cuando se trataba de alumnos preparados o de colegas.

Debido a que Alemania se encontraba dominada por



El observatorio de la Universidad de Gotinga.

los franceses, el sueldo que la Universidad de Gotinga ofreció a Gauss no era muy bueno, pero le era suficiente, sobre todo teniendo en cuenta que él y su familia siempre estuvieron acostumbrados a una vida muy austera. Como dice su amigo y uno de sus primeros biógrafos, Sartorius, "Gauss fue sencillo y sin afectación desde su juventud hasta el día de su muerte. Un pequeño estudio, una mesita de trabajo con un tapete verde, un pupitre pintado de blanco, un estrecho sofá, y, después de cumplir los 70 años, un sillón, una lámpara con pantalla, una alcoba fresca, alimentos sencillos, un bastón y un gorro de terciopelo eran todas sus necesidades."

Para poder solventar las guerras en que estaban involucrados, los franceses impusieron a los alemanes el pago de cuotas bastante elevadas. Gauss, como profesor y astrónomo, tenía que pagar dos mil francos, cantidad que estaba por encima de sus posibilidades. Recibió una carta de su amigo Olbers en la que éste se mostraba indignado por la extorsión a la que tenía que someterse un estudioso como Gauss, y le enviaba el importe del pago, pero Gauss, muy agradecido, le devolvió el dinero.

Poco después recibió una carta de Laplace que, aunque era francés, le comunicaba que había tenido el honor de pagar los dos mil francos para quitarle de encima esa inmerecida carga al matemático más grande del mundo, a quien consideraba su amigo. Como Laplace había pagado la multa en París, Gauss no pudo reembolsarle el dinero, pero de todas maneras se negó a aceptar la ayuda de Laplace y se las ingenió más adelante para devolverle con intereses el dinero prestado. El tercer intento de ayuda a Gauss no pudo ser rehusado por éste, ya que provino de un admirador anónimo y no supo a quién devolver los mil florines que en esa ocasión le habían mandado.

Poco después algunos amigos le sugirieron que pidiera a Napoleón que le perdonara la multa aludiendo a su prestigio. Con seguridad el emperador se mostraría clemente, pero Gauss se negó rotundamente a prostituir la ciencia de esa manera. No podía olvidar la muerte de Ferdinand y pensaba que ni la matemática ni él tenían que depender de la condescendencia de Napoleón.

Debido a la muerte del duque Ferdinand, a la precaria posición de Alemania bajo el dominio de los franceses, a su situación económica y a la muerte de su padre en 1808 y de su primera esposa en esa misma época, la salud de Gauss se desmejoró bastante cuando tenía apenas cerca de 30 años de edad. Nunca fue muy comunicativo al respecto. Su depresión de esos días se refleja en una de las muy pocas anotaciones no científicas que hizo en su diario; repentinamente se interrumpen unos cálculos relacionados con funciones elípticas y escribe: "La muerte me sería más querida que esta vida." El trabajo fue su medicina.

Es notable el contraste de actitudes ante el enemigo caído que puede observarse entre el genio de las matemáticas que fue Gauss y el genio militar que fue Napoleón. Ya vimos cómo trató este último al duque Ferdinand cuando lo derrotó. Al caer Napoleón, Gauss no exteriorizó su alegría; empezó a leer todo lo que pudo sobre la vida de Napoleón para tratar de entender las acciones de un hombre como él.

Los dos matrimonios de Gauss

En los momentos en que la fama de Gauss empezaba a crecer debido a sus trabajos sobre Ceres, el duque Ferdinand aumentó su pensión, lo cual le permitió al matemático casarse, el 9 de octubre de 1805, con Johanna Üsthof. Se conocían desde niños, pero se sabe poco de la época en que decidieron comprometerse. Johanna era tres años menor que Gauss y la relación con ella le proporcionó a este último una inmensa felicidad. Tres días después de la boda, Gauss escribió estas palabras a su gran amigo de Gotinga, Farkas Bolyai: "La vida se alza ante mí como una eterna primavera, con nuevos y brillantes colores."

Su situación económica en Brunswick no era holgada, a pesar de la gran ayuda del duque, pero eso no impidió que la joven pareja llevara una relación que Gauss siempre recordó como una de sus épocas más felices.

En 1806 tuvieron su primer hijo, al que llamaron Joseph en honor a Piazzi, el descubridor de Ceres y responsable indirecto de la fama de Gauss. Posteriormente tuvieron una hija y otro hijo a los que les dieron también los nombres de pila de otros dos astrónomos: Wilhelmine (Minna) por Olbers, descubridor de Pallas, entre otras cosas, y Louis, en honor a Harding, que descubrió Juno, otro de los asteroides.

Para darnos una idea de la vida cotidiana de Gauss y Johanna, presentaremos extractos de cartas que se enviaron durante una de las visitas de Gauss a Bremen, lugar que el gran matemático visitaba con frecuencia para realizar unos trabajos con Olbers. Primero la carta de Johanna:

"Lamentó, mi dulce amado, que mi silencio te haya perturbado; todo en nuestra casa siguió su curso normal. Yo estuve muy bien, excepto que he deseado que estuvieras aquí. A Josepf (!) nada le falta, está muy contento. Su niñera, como ya te lo había dicho, llegó el viernes. Es una persona muy tranquila y recta, una vieja solterona, pero le agradan tanto los niños que Joseph se sintió a gusto con ella desde el primer día; ahora le agrada tanto estar con ella como con su madre, lo que creo prueba que puedo confiárselo sin reservas. Diariamente él hace caminatas y visita con ella a nuestros parientes o a sus antepasados, de los cuales hay bastantes. Esto le gusta tanto que lo hace muy obvio señalando la puerta, y si no quiere estar dentro de la casa patalea. Su vitalidad se ha incrementado mucho; todos lo disfrutan y según Ebeling [la niñera] nadie cree que ese delicado y fino rostro es el de un niño. El día 27 llegó, sin ninguna dificultad, su séptimo diente. . ."

Antes de recibir esta carta, Gauss le envió una a Johanna en la que le decía:

"No hay, mi querida Hannchen, manera más placentera de llenar las pocas horas en que no estoy muy ocupado, que platicando contigo aun sin tener nada importante que decirte. Continuaré diciéndote cómo me va en Bremen. . ."

Al recibir la carta de Johanna, Gauss le respondió de inmediato:

"Las penalidades del viaje no afectaron mi salud, pero los considerables cambios en mi dieta (aquí hago cuatro comidas al día y cada una tan abundante como en casa, y la gente se queja de mi escaso apetito) al principio me causaron obstrucciones que remedié con un laxante, pero ya estoy empezando a acostumbrarme a la manera epicúrea de vivir. Olbers está interesado en viajar conmigo a París; ya que ninguno de los dos sabemos apreciar el teatro francés y tonterías similares, podríamos visitar todo sin prejuicios dentro de unas semanas para terminar el viaje aproximadamente dentro de cinco semanas.

"Las noticias del armisticio entre Francia y los rusos parecen confirmarse por lo que tal vez haya paz antes de lo esperado, pero mientras tanto los ingleses han desembarcado en la Pomerania sueca. Qué mundo tan loco.

"Ahora debo vestirme; tengo que apurarme. Muchos recuerdos a tu buena madre y a todos nuestros amigos."

Como vimos, en 1807 Gauss y su familia se trasladaron a Gotinga. Casi dos años después, en 1809, Johanna murió a consecuencia del parto en el que nació su tercer hijo: Louis, quien falleció pocas semanas después.

Al morir su mujer, Gauss escribió a Olbers:

"Fuiste muy amable al invitarme a visitarte cuando mi esposa estuviera bien. Ahora ella está bien. Ayer en la tarde, a las 8, cerré sus ojos angelicales en los que había encontrado el paraíso durante los últimos cinco años. El cielo me da fuerzas para afrontar este golpe. Dame unas cuantas semanas, querido Olbers, para reunir nuevas fuerzas en los brazos de tu amistad, fuerzas para una vida que sólo vale la pena porque pertenece a mis tres pequeños hijos. Si el doctor lo permite, continuaré esta carta dentro de unos días."

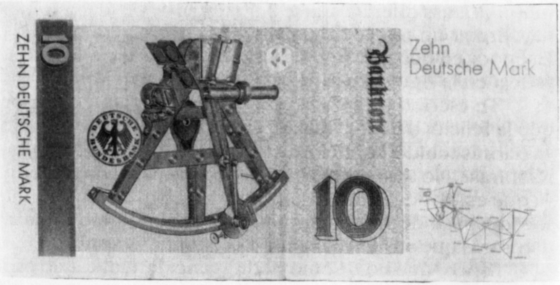
La primavera de la que Gauss hablaba a Olbers inmediatamente después de casarse se convirtió en un duro invierno. Le costó mucho tiempo reponerse de este golpe. Sin embargo se volvió a casar muy pronto con la mejor amiga de Johanna, Minna Waldeck. En un principio, más que por experimentar un sentimiento muy profundo hacia Minna, Gauss quería casarse para tratar de olvidar a Johanna, formar un nuevo hogar y darle una madre a sus hijos. La época en que se comprometieron no fue fácil, lo que se refleja en la siguiente carta que Gauss envió a Minna:

"Te escribo esta carta con el corazón palpitante porque la felicidad de mi vida depende de ella. Cuando la leas ya habrás tenido conocimiento de mis deseos. ¿Cómo los recibirás? ¿No apareceré ante ti bajo una luz inconveniente ya que estoy pensando en una nueva unión, apenas medio año después de haber perdido a una esposa tan amada? ¿Pensarás que soy frívolo o algo peor?

"Espero que no. ¿Cómo podría tener la audacia de pretender tu corazón, si no pensara que me estimas tanto que no me adjudicarías ningún motivo por el cual tuviera que avergonzarme?

"Te respeto demasiado como para desear ocultar que sólo puedo ofrecerte un corazón dividido del cual nunca desaparecerá la imagen de la sombra gloriosa. Pero si supieras cuánto te amaba y estimaba la que se fue, entenderías que en este importante momento, mientras te pido que decidas si puedes ocupar su lugar, veo vivamente a la amada que partió dando con alegría su consentimiento a mis intenciones y deseando para mí y para nuestros hijos felicidad y bienaventuranza.

"Pero, mi bienamada, no quiero presionarte, ante lo que será la decisión más importante de tu vida, diciendo que un espíritu bendito vería con profundo placer la realización de mis deseos; y que tu madre, a la que he hecho saber cuáles son éstos (ella misma te dirá por qué lo hice), y tu padre, quien sabe de ellos por tu madre, aprueban mis intenciones y esperan que de ellas se derive la felicidad de todos nosotros; que yo, a quien le fuiste querida desde el



Este moderno billete alemán de diez marcos, mínimo homenaje a Gauss, muestra la Universidad de Gotinga, la campana de Gauss, un sextante y un ejemplo de trabajos geodésicos.

primer momento en que te conoció, sería muy feliz. Menciono todo esto para pedirte, implorarte, que no lo tomes en cuenta y consultes únicamente tu propia felicidad y tu corazón. Mereces la felicidad más pura, y no debes ser guiada por ninguna consideración secundaria, de cualquier naturaleza, que sea ajena a mi persona. Permite que confiese abiertamente que, modesto y fácil de satisfacer en otras demandas de la vida como soy, en los más íntimos aspectos domésticos no conozco un camino intermedio. Debo ser muy feliz o muy infeliz: aun la unión contigo no me haría feliz si no te hiciera a ti completamente feliz."

En agosto de 1810, cerca de un año después de la muerte de Johanna, Gauss y Minna Waldeck se casaron. Al poco tiempo tuvieron hijos: en 1811 a Eugene, en 1813 a Wilhelm y en 1816 a Theresa. Fueron un matrimonio razonablemente feliz: el mundo de Minna fue una nueva experiencia para Gauss, pero se adaptó rápida y completamente. Recién casados Gauss era todavía aquel ingenioso joven científico de origen pobre lleno de gratitud hacia el duque Ferdinand, a quien parecía deber todo lo que era; el segundo matrimonio lo convirtió en el yerno de un famoso profesor de jurisprudencia, con una esposa saludable e independiente y una situación económica estable. Sin embargo, a partir del nacimiento de Theresa, Minna empezó a enfermarse con frecuencia y fue perdiendo la capacidad para el trabajo doméstico y la vida social, incluso tuvo que guardar cama durante largos periodos, sobre todo en los últimos diez años de su vida, que terminó en el año 1831; la enfermedad prácticamente la consumió. Esta época fue bastante dura para Gauss; por un lado la enfermedad de Minna, y por el otro las malas relaciones con algunos de sus hijos. En muchos sentidos Gauss jamás cambió, pero su segundo matrimonio le dejó una marca indeleble.

En total Gauss tuvo seis hijos, tres con Johanna, de los que sobrevivieron Joseph y Minna, y los tres que tuvo con Minna: Eugene, Wilhelm y Theresa. Su relación con ellos fue muy diferente. Con sus hijas siempre fue cordial y muy cariñoso. Theresa le hizo compañía toda la vida, y Minna fue más independiente pero siempre estuvo cerca del padre. Con su hijo mayor, Joseph, la relación fue bastante buena. Era un buen ingeniero, y fue asistente de Gauss en una época en que éste estaba involucrado en un proyecto geodésico del que hablaremos más adelante. Posteriormente ingresó al ejército, donde no tuvo mucho éxito, y terminó trabajando en una compañía privada de ferrocarriles en Hannover. A partir de entonces fueron pocos los contactos entre padre e hijo, pero Gauss disfrutaba mucho las cartas y las visitas de Joseph. En sus cartas, Gauss hace muchas referencias a su hijo mayor.

Con los otros dos hijos varones las cosas no salieron bien. Tanto Eugene como Wilhelm emigraron a Estados Unidos después de prolongados conflictos con el padre. La separación fue dolorosa, especialmente en el caso de Eugene, que fue obligado por Gauss a estudiar leyes, carrera que no le gustaba. Nunca pudo enfrentarse al padre directamente, y el conflicto estalló a causa de la buena vida que Eugene se daba en Gotinga y de sus deudas de juego. En 1830 hubo una crisis familiar y Eugene se fue de casa sin decir a dónde. Después fue encontrado en Bremen, donde Gauss lo vio por última vez. Parece que este encuentro fue muy doloroso y posteriormente Eugene se embarcó hacia Filadelfia.

Wilhelm estaba interesado en las granjas, carrera no muy prometedora según sus padres, y en la época de los conflictos con su hermano trabajaba como aprendiz en una granja en Hannover. Aunque los trabajos en que había estado le gustaban, nunca pudo entablar buenas relaciones con sus jefes y éstos nunca estuvieron contentos con él. No encontró ninguna oportunidad para hacerse de una buena granja y decidió probar suerte y emigrar también a Estados Unidos, después de casarse con una sobrina de Bessel. Su partida fue en 1832 y no resultó tan conflictiva como la de Eugene. Tampoco volvió a ver a su padre, aunque más adelante hubo correspondencia de ambos hijos emigrados con Gauss.

Lo que hizo muy amargos estos conflictos con los hijos fue que coincidieron, sobre todo en el caso de Eugene, con la época en que su madre estaba peor de salud. Con seguridad, había un factor psicológico en la enfermedad de Minna. Siempre se notó en ella una gran inseguridad que la hacía hundirse ante casi cualquier circunstancia. Esto queda de manifiesto en las cartas que enviaba a Gauss. Presentaremos primero una parte de una carta que mandó a su marido a Lindenau en 1811, el año de su boda:

"Los niños disfrutaron mucho tu carta, Joseph ha preguntado más de diez veces dónde está su padre y cuándo viene, y Minna también pregunta por ti y quiere saber si le traerás algún regalo.

"Si te dijera, querido muchacho, cuántos momentos tristes he pasado en tu ausencia sin contar la enfermedad de mi padre. Carl, mi Carl, ¿realmente me amas? Lo siento: mi frecuente indisposición debe hacerte daño, pero, por Dios, no puedo vencerla; tampoco puedo terminar con esta sobresensibilidad, pues ciertamente es consecuencia de un exceso de sensibilidad de los nervios, pero por Dios, tiene que cambiar, va a cambiar; me hace muy infeliz. Sólo ten un poco de paciencia, buen muchacho, y no retires tu amor, va a cambiar, no quiero seguir viviendo con esta melancolía. Que suerte que el final de las vacaciones y tu madre te traigan de regreso, de otra manera temo que Lindenau te diera mucho que ver y que oír, y te olvidaras de regresar. No pienses que estoy celosa; me pone contenta que estés satisfecho, y estoy segura de que ahí lo estás. Oh, Dios de los Cielos, si yo pudiera darte la felicidad que esperas; Dios sabe que no es falta de voluntad sino de fuerza; el cielo permita que los niños se desarrollen como buenos hombres y entonces habré cumplido al menos parte de mi destino. . ."

Ahora una carta que Minna envió a Gauss cuando éste había ido a Bremen para encontrarse con su hijo Eugene en 1830:

"Aunque había hecho una firme promesa a Dios de no escribir nada, tengo que romperla por ti, querido Carl. Qué feliz estoy de que tu salud esté bien. La mía está en general mejor, pero no debes esperar encontrarme cambiada. El dolor y la enfermedad me han afectado tanto que tomará tiempo antes de que desaparezcan mis profundas arrugas, pero ocurrirá. Lo que escribiste acerca de Eugene fue un consuelo para mí. Dios nos protege, estoy muy agradecida de que Él te haya permitido encontrar un barco, ya que no podíamos esperar que hubiera uno listo para zarpar. Esto es lo último que podías hacer por Eugene, que Dios lo ayude. Siento otra vez que él no ha muerto para nosotros; es un hijo pródigo. Entiendo, mi querido Carl, que tienes que quedarte más tiempo. No tienes que decirme la fecha de tu regreso; ese día será de gran felicidad y traerá luz a la oscura noche que me rodea. Ahora una petición más, querido Carl, no te niegues; arregla tu regreso de tal manera que puedas visitar a Wilhelm. La señora Ihssen escribió, y dice que ella y su marido están convencidos de que tendría un buen efecto en Wilhelm; además disfrutarás viéndolo. Carl, hazlo por mí, por favor, supongo que ambos necesitamos consuelo. Joseph no se opondrá, él ha salido bien, honesto y bueno, pero Wilhelm tiene aún que desarrollarse. . . Te escribió una carta llena de las más sagradas declaraciones de cómo es su más ferviente deseo el de complacernos. Los Ihssen me aseguran que ahora lo cuidarán aún mejor. Carl, ¿podrías negarte a lo que te pido? Dios, he sido tan profundamente humillada, tan profundamente, que te suplico no te niegues a algo que puedes hacer con facilidad. Dios sabe que haría cualquier cosa que pudiera para salir de esta oscuridad, una oscuridad llena de dolor. No puedo continuar, que Dios te proteja, Carl, y no te niegues a mis peticiones."

Cuatro días después de la muerte de su esposa Minna, Gauss le envió una carta a Olbers en la que puede apreciarse una especie de indiferencia que no es más que el reflejo de una profunda depresión y un desgano causados por todo lo vivido en los años inmediatamente anteriores:

"Los meses posteriores a la última carta que te envié fueron tiempos difíciles en mi casa. Cuánto tiempo y cuánto tuvo que sufrir ella antes de que su corazón se detuviera. Finalmente se detuvo. En la tarde del día 12 partió de esta vida de dolor, y hoy la tierra recibió sus restos mortales.

"Mis dos hijas me han ayudado mucho; mi hijo mayor está terminando su último año de observaciones, pero espero verlo muy pronto por aquí. Mi hijo menor, en Copenhague; se está empezando a reponer de una enfermedad casi fatal que contrajo hace seis semanas.

"Me consultaron acerca del viejo puesto de Bohnenberger, y les sugerí a Gerlin, quien poco después recibió una oferta de Tubinga con excelentes condiciones. . ."

Al final de esta etapa, que termina con la muerte de Minna y con la salida de sus dos hijos menores a Estados Unidos, se incrementaron notablemente la rigidez y la insatisfacción de Gauss, así como sus deseos de estar solo. Aumentó también su desprecio por el trabajo de sus colegas jóvenes, del que tanto se le acusa, y su desmotivación hacia sus propias investigaciones. Sin embargo pronto encontró caminos que le permitieron revivir su entusiasmo y creatividad, y todavía produjo grandes ideas que describiremos más adelante. Antes de esto, debemos retomar la vida de Gauss desde su regreso a Gotinga como profesor y director del nuevo observatorio de la universidad de esa ciudad, ya que no hemos hablado de sus trabajos e investigaciones a partir de entonces y hasta la época en que murió su segunda esposa.

Después de la fama, Gotinga para siempre

Como ya mencionamos, después de haber pensado en algunos ofrecimientos halagüeños, Gauss decidió vivir en Gotinga como profesor y director del nuevo observatorio de esa ciudad. Llegó en 1807 y pasó allí el resto de su vida; los pocos viajes que hizo fueron todos relacionados con su trabajo. En esa época Gauss empezó a trabajar en varias áreas simultáneamente, cosa que nunca dejó de hacer.

Los primeros años en Gotinga presenciaron otro resurgimiento de las ideas de Gauss, que lo llevó a publicar muchos trabajos importantes en diferentes campos: un estudio riguroso de las series infinitas, en el que aparece su serie hipergeométrica, precursora de las que hoy llamamos funciones especiales, de gran utilidad en física incluso hoy en día; una importante aportación a los métodos de integración aproximada; un análisis muy precoz de la eficiencia de los estimadores estadísticos; más trabajos sobre las órbitas de los planetas y las perturbaciones que les causan los demás planetas. (Si hoy, lector, no entiendes nada de todo esto, y este librito te lleva a perseverar en el camino de las matemáticas, no te preocupes: ¡lo entenderás muy bien!) Al mismo tiempo siguió pensando, como lo muestran algunas anotaciones de 1813, en teoría de números, líneas paralelas, declinación de las estrellas, números complejos, teoría del color y prismas.

Dedicó buena parte de su tiempo a la astronomía, sobre todo en lo relacionado con el equipamiento y puesta en marcha del nuevo observatorio a su cargo, el cual no quedó listo sino hasta 1816, y bien equipado hasta 1821. En 1816 realizó un viaje de cinco semanas a Baviera con dos de sus ayudantes, uno de ellos su hijo Joseph, para visitar a varios diseñadores y fabricantes de instrumentos ópticos de primera línea y así equipar su observatorio. Aunque el trabajo teórico de Gauss en astronomía terminó en esa época, nunca dejó de observar el cielo e informar de sus mediciones, y siempre estuvo pendiente de todo detalle en cuanto a instrumentación.

Fue en esos años cuando maduraron sus ideas respecto a la llamada geometría no euclideana. En ese tiempo toda la geometría conocida se había desarrollado a partir de unos cuantos postulados o "verdades aceptadas", que se conocen como los de Euclides, por lo que la geometría emanada de ellos es la geometría euclideana. De estos postulados, uno de ellos empezó a crear problemas hacia finales del siglo XVIII: el quinto, o postulado de las paralelas. Éste dice que, dada una línea recta y un punto exterior a ella, hay una y sólo una recta que, pasando por dicho punto, es paralela a la recta dada. Parece tan evidente este enunciado que podríamos preguntarnos cuál es el problema con él. En un principio los matemáticos pensaron que este postulado debería poderse demostrar a partir de los demás postulados de Euclides, reduciendo así el número de postulados básicos. Todos los intentos de demostrarlo fueron inútiles: uno de los matemáticos más tercos en este sentido fue Farkas Bolyai, el amigo de Gauss desde su primera etapa en Gotinga. Bolyai dejó de ver a Gauss porque se fue a vivir a su país, Hungría, donde siguió durante casi toda su vida intentando demostrar el quinto postulado, sin éxito.

En la época de la vida de Gauss que estamos describiendo, éste llegó a la conclusión de que el postulado de las paralelas no podía demostrarse, y que por lo tanto podían existir otro tipo de geometrías en las que éste no fuera cierto.

El 17 de diciembre de 1799 Gauss escribió una carta al matemático húngaro Farkas Bolyai, en la que le decía: "...En lo que a mí respecta, he hecho algunos progresos en mi trabajo. Sin embargo, el camino que he elegido no lleva al objetivo que habíamos buscado [la deducción del axioma de las paralelas], que tú me aseguras haber alcanzado. Incluso estoy empezando a dudar de la veracidad de la propia geometría. Es verdad que he llegado a mucho de lo que la mayoría de la gente sostendría que constituye una prueba, pero a mis ojos no es nada. Por ejemplo, si pudiéramos demostrar que es posible tener un triángulo rectilíneo cuya área fuera mayor que cualquier área dada, estaría en condiciones de probar de una manera completamente rigurosa toda la geometría.

"La mayor parte de la gente establecería esto como un axioma; pero yo no. De hecho podría ser que el área de cualquier triángulo estuviera por debajo de cierto límite, sin importar cuánto se alejen los tres puntos que definen al triángulo."

Este pasaje muestra cómo Gauss, en 1799, a los 22 años de edad, sospechaba ya que el axioma de las paralelas no podía demostrarse a partir de los otros axiomas o postulados de Euclides, y empezó a pensar en desarrollar una nueva geometría. Pocos años después, Gauss estaba convencido de lo que llamó primero geometría antieuclideana, después geometría astral y finalmente geometría no euclideana; estaba seguro de que era lógicamente consistente y de que algún día podría tener aplicaciones. En una carta que escribió a su amigo Olbers en 1817, Gauss comenta: "Cada vez me convenzo más de que la necesidad física de nuestra geometría euclideana no puede ser demostrada, al menos no por la razón humana ni para la razón humana. Quizás en otra vida seamos capaces de percibir la naturaleza del espacio, que por ahora es inasequible. Debemos poner a la geometría, no en la misma clase que a la aritmética, que es pura y *a priori*, sino con la mecánica."

Gauss nunca publicó sus resultados a este respecto; sin embargo, ha podido demostrarse que fue uno de los primeros en dudar de la geometría euclideana.

En 1831 Gauss recibió una notificación de su amigo Farkas Bolyai de que su hijo, János Bolyai, había llegado a construir una nueva geometría. La respuesta de Gauss fue la siguiente: ". . .Ahora unas palabras en relación con el trabajo de tu hijo. Te sorprenderá que empiece diciendo que no puedo juzgarlo. Pero no puedo hacer otra cosa: elogiarlo sería como elogiarme a mí mismo, ya que todo lo que contiene el artículo y la manera en que tu hijo ataca el problema, coinciden casi completamente con las reflexiones que hice, en parte, hace 30 o 35 años. De hecho estoy muy sorprendido. Mi intención era dejar mi trabajo, del que sólo tengo escrito una pequeña parte, sin publicar en toda mi vida. . . Por otro lado he intentado escribirlo poco a poco para que cuando menos no desaparezca conmigo. Estoy muy sorprendido de que ahora pueda detener estos intentos, y me hace muy feliz que sea el hijo de uno de mis viejos amigos quien me haya superado de esa manera tan notable. . ."

La carta continúa con algunos detalles del trabajo de János y luego muestra la forma en que Gauss calculó el área de un triángulo hiperbólico. Después plantea a János el problema de encontrar el volumen de un tetraedro en esta nueva geometría. Finalmente Gauss manda felicitaciones a János, a quien no había conocido: "De cualquier forma, te pido que lo felicites de mi parte, con la seguridad de mi especial estima."

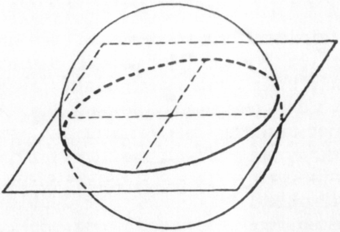
El joven Bolyai era muy susceptible y su reacción a la carta de Gauss fue dejar para siempre las matemáticas; el muchacho se entregó a las mujeres y al alcohol. Más tarde Gauss entró en contacto con Lobachevsky, matemático ruso que había llegado a conclusiones similares. Gauss, en este caso, fue menos arrogante, pero se negó a hacerle publicidad a estas ideas.

Podría pensarse que Gauss motivó los trabajos tanto de Bolyai como de Lobachevsky, ya que Bartels fue maestro de este último, y Gauss tuvo bastante comunicación con Bartels y el padre de Bolyai, que eran sus amigos. Sin embargo, revisando la extensa documentación que existe, puede llegarse a la conclusión de que las ideas de Gauss no inspiraron las de Bolyai y Lobachevsky, a quienes se reconoce como los fundadores de la geometría no euclideana. Aunque también se acepta que Gauss tuvo ideas al respecto independientemente, y que su trabajo es de gran importancia en esa área, debido a su actitud su influencia fue, haciendo un balance, negativa, ya que su silencio frenó considerablemente el desarrollo de la nueva geometría.

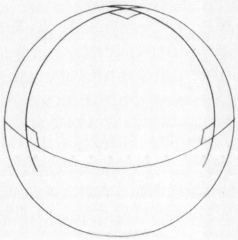
Pondremos a continuación un ejemplo que puede aclarar qué es la geometría no euclideana. Si no se cumple el famoso postulado de las paralelas (recordemos que dos rectas son paralelas si nunca se cortan), tenemos dos posibilidades. Una es que por el punto no pase ninguna paralela a la recta dada, y la otra es que por dicho punto pasen muchas paralelas a la recta original. (La primera posibilidad dio lugar a la geometría hiperbólica y la segunda a la geometría esférica.) Ambas posibilidades nos suenan de entrada un poco insólitas, pero tienen tanto de realidad como la geometría convencional. Todo el problema se reduce a lo que entendemos por una línea recta: este concepto puede ser ampliado. Pensemos por un momento que vivimos sobre una esfera, como en realidad ocurre, y que no podemos salirnos de esta superficie esférica. Para nosotros una línea recta es la distancia más corta entre dos puntos. Pero esta distancia debe medirse sobre la superficie curva en la que nos encontramos. Por ejemplo, si queremos ir de México a Bombay, en la India, el camino más corto sería cavar un hoyo en la dirección apropiada para llegar a nuestro destino; como esto es imposible, al menos por el momento, la distancia más corta entre ambos puntos, es decir, la recta que une a México con Bombay, es un arco de circunferencia, pero no cualquier circunferencia, sino, como el lector puede imaginarse, una cuyo centro coincida con el de la Tierra. Los círculos cuyo centro coincide con el de la Tierra se llaman círculos mayores. Todos los meridianos son círculos mayores, pero de los llamados paralelos sólo el Ecuador es un círculo mayor. Si nos movemos de un lugar a otro que esté a la misma latitud que el primero, y lo hacemos siguiendo un paralelo, no estaremos yendo por el camino más corto.

Podemos definir, entonces, que sobre nuestra esfera las "rectas" son las circunferencias mayores, ya que son las trayectorias más cortas entre cualesquiera dos puntos sobre la superficie. Con esta definición, invitamos al lector a que piense en una de estas "rectas" y en un punto que no esté sobre ella. ¿Existirá una, varias o ninguna "recta" que pasando por el punto sea paralela a la "recta" dada?

La respuesta es que no existe ninguna, ya que todos los círculos mayores se cortan y por lo tanto en una superficie esférica no se cumple el quinto postulado si llamamos



En la esfera, una "recta" (la distancia más corta entre dos puntos) es un círculo máximo, o sea, uno cuyo centro coincide con el de la esfera.



La suma de los ángulos interiores de un triángulo, en la geometría esférica, es mayor que 180°, como puede verse en este esquema.

"rectas" a los círculos mayores. Veamos otro resultado de esta geometría esférica. Fijémonos en tres puntos sobre la Tierra: el polo norte y dos puntos sobre el ecuador, uno situado a longitud 0 y el otro a longitud 90° O, por ejemplo. Estos tres puntos forman un triángulo, si los unimos mediante las tres "rectas" correspondientes. Este triángulo tiene propiedades diferentes de las de los triángulos de la geometría plana. Por ejemplo, veamos cuánto es la suma de los ángulos internos de este triángulo. El lector puede imaginarse que los tres ángulos de este triángulo miden 90 grados, y por tanto su suma será de 270 grados. Todo estudiante de secundaria, y algunos de primaria, saben que los ángulos internos de todo triángulo suman 180 grados. Éste es un resultado de la geometría euclideana y nuestro triángulo es un objeto de la geometría esférica que es un ejemplo de geometría no euclideana. A cualquier triángulo que hubiéramos elegido sobre la esfera le ocurre que la suma de sus ángulos internos es mayor que 180 grados. Las propiedades de los objetos geométricos en este caso son diferentes de aquellas a las que estamos acostumbrados; sin embargo, son tan reales como ellas.

También existe un ejemplo de superficie con la cual puede visualizarse de forma sencilla la geometría hiperbólica, definiendo sobre ella las rectas también con la idea de que la distancia entre dos puntos sea la más corta medida sin salirse de la superficie. No describiremos con detalle este caso; sólo diremos que es una superficie parecida a una trompeta, y que sobre ella hay muchas paralelas a una recta que pasan por un punto dado. Además todo triángulo sobre esta superficie tiene la propiedad de que sus ángulos internos suman menos de 180 grados.

Después del tortuoso nacimiento de las geometrías no euclideanas hubo varios trabajos en este campo, cuya culminación fue la obra de Riemann, seguidor y admirador de Gauss, que generalizó todas estas ideas a un número arbitrario de dimensiones y construyó lo que hoy conocemos como geometría de Riemann o riemanniana. El trabajo de este gran matemático se basó mucho en el de Gauss en diversas áreas, pero básicamente en todo lo que éste hizo en geometría diferencial (es decir, la aplicación del cálculo infinitesimal a la geometría). Gauss, en este caso, apoyó mucho a Riemann, y alabó y defendió sus trabajos, en una época en que casi nadie era capaz de entenderlos.

La geometría no euclideana encontró una sorprendente aplicación en el año 1916, cuando Einstein la utilizó con éxito para describir la fuerza de gravedad mediante su teoría general de la relatividad. Si Gauss hubiera vivido para ver esto, hubiese aumentado considerablemente su asombro ante el hecho de que las teorías más abstractas de las matemáticas pueden servir para describir la realidad.

La geodesia y la geometría diferencial

Aunque es cierto que Gauss, en casi todas las etapas de su vida, se mostraba interesado por problemas muy diferentes, y en todos trabajaba y obtenía resultados importantes, siempre había un área que dominaba su interés, según la época de la que se tratara. A partir de 1817, y a lo largo de ocho años, el interés de Gauss se centró en la geodesia. Después de ese tiempo no la abandonó por completo, pero sus intereses se dirigieron a otros temas.

La geodesia es la ciencia que se encarga de las mediciones precisas de nuestro planeta, con el fin de determinar su forma y tamaño, así como la localización de puntos sobre su superficie. El interés de Gauss en esta ciencia no fue repentino; ya desde que era más joven le había llamado la atención algunos trabajos sobre agrimensura. A su llegada a Gotinga deseó localizar con toda precisión su observatorio y en 1812 se estimuló su interés en problemas más generales a partir de una discusión sobre los niveles del mar en una visita que hizo al observatorio de Seeberg. Entonces empezó a discutir la posibilidad de extender a Hannover los últimos trabajos geodésicos hechos en Dinamarca. (En esa época Gotinga estaba bajo el gobierno de Hannover.)

Gauss tuvo varios motivos para interesarse en este proyecto de triangulación de Hannover; involucraba problemas interesantes de matemáticas, le proporcionaba un nuevo campo para ejercitar sus habilidades de cálculo, complementaba sus trabajos de astronomía posicional, representaba una competencia para los franceses en la medición de la longitud de un grado a lo largo de un meridiano, le brindaba la oportunidad de hacer algo útil para el reino, le ofrecía un escape de algunos aspectos desagradables de su trabajo y de sus problemas familiares, y le significaba una entrada extra de dinero, lo cual le venía muy bien, pues su familia había crecido considerablemente para esa fecha.

El proyecto de triangulación de Hannover no fue aceptado oficialmente sino hasta 1820, pero Gauss había comenzado a realizar arduos trabajos de agrimensura en 1818, durante el verano, para continuar durante el invierno con el análisis de los datos obtenidos; lo mismo hizo en los años siguientes. Gauss realizó el trabajo de campo prácticamente solo durante ocho años, sufriendo las consecuencias del pésimo transporte, condiciones incómodas, mal clima, funcionarios poco cooperativos, accidentes, mala salud, inadecuada asistencia y soporte financiero, etcétera. A partir de 1825 decidió limitarse a supervisar, y el trabajo pesado lo hicieron otros, hasta que el proyecto de triangulación de Hannover culminó en 1847.

Motivado por la torpeza de los aparatos con que contaba para hacer sus mediciones, Gauss inventó el heliótropo, un aparato que funciona mediante la reflexión de los rayos del sol. Después de estudiar la teoría óptica, en 1821 construyó su primer instrumento, que resultó ser de gran utilidad. Aunque Gauss no conocía la referencia, en la literatura especializada existían descripciones de aparatos similares llamados helióstatos. De cualquier manera el heliótropo de Gauss aumentó considerablemente la precisión, combinando espejos con un pequeño telescopio. Se volvió parte del equipo tradicional para las triangulaciones de gran escala hasta que en 1840 fue superado por otros modelos, y en el siglo actual por la agrimensión aérea.

Gauss hizo varias publicaciones de sus estudios teóricos y prácticos de geodesia y de problemas matemáticos relacionados. Su trabajo en esta área fue retomado y desarrollado posteriormente por un geodesta alemán, dando lugar a lo que se conoce como la proyección de Gauss-Krueger, presentada en 1912, que es una generalización de la proyección de Mercator, y permite encontrar una posición segura como base de redes topográficas, tomando en cuenta la forma esferoidal de la Tierra.

Sus investigaciones motivaron también que Gauss perfeccionara su principio de los mínimos cuadrados y generalizara sus ideas sobre matemática estadística. En un trabajo publicado en 1828 resumió todos sus hallazgos de esta etapa en cuanto a la forma de la Tierra, errores instrumentales y cálculos de observaciones.

Lo más importante del trabajo de Gauss en esta época, que de hecho abrió un nuevo campo de investigación en matemáticas, es un trabajo en el cual, aunque no es propiamente de geodesia, algunas de las ideas básicas fueron motivadas por los problemas concretos que Gauss encontró en esta ciencia. El trabajo se llama *Disquisitiones generales circa superficies curvas (Disquisiciones generales acerca de las superficies curvas)*, y fue publicado en 1828. En él se exponen las bases de lo que hoy conocemos como geometría diferencial, y dio pie directamente a más de un siglo de investigaciones en este nuevo campo. En sentido estricto, el tema no era nuevo; ya gente como Euler, Lagrange y Monge había investigado la geometría de ciertas superficies curvas, pero Gauss abordó el problema en toda su generalidad, y partiendo de sus investigaciones se desarrolló el primer gran periodo de la geometría diferencial.

La geometría diferencial se puede definir en términos muy generales como el estudio de las propiedades de curvas, superficies y objetos matemáticos llamados hipersuperficies que se encuentran en espacios de más de tres dimensiones, cerca de un punto. En este sentido, la geometría diferencial estudia las superficies localmente, no como un todo. Para estudiar estas propiedades, la geometría diferencial, como su nombre lo indica, hace uso del análisis o cálculo infinitesimal (cálculo diferencial e integral).

Tres de los problemas que Gauss consideró en su trabajo sobre superficies sugieren teorías generales importantes:

El primero es el de la curvatura de una superficie, es decir, cuantificar cuán curvada está una superficie en sus diferentes regiones. Hoy conocemos el concepto de curvatura total en un punto como curvatura de Gauss. La esfera es una superficie cuya curvatura de Gauss es la misma en todos sus puntos; esto no le ocurre a cualquier superficie.

El segundo problema lleva a la teoría de la representación conforme, que se traduce en definir un sistema de coordenadas sobre una superficie, aunque sea localmente, es decir, en una cierta región. Por ejemplo, en la superficie de la Tierra tenemos un sistema de coordenadas definido por los paralelos y los meridianos. En otras superficies es más complicado precisarlo, pero puede llevarse a cabo encontrando ecuaciones paramétricas que describan la superficie.

El tercer problema es el de la aplicabilidad de las superficies. Se trata de ver cuándo una superficie puede aplicarse, es decir, "ponerse sobre" otra superficie, sin romperse o estirarse. Por ejemplo, una superficie cilíndrica o un cono son aplicables sobre un plano: basta desdoblarlos y quedan planos sin romperse. Sin embargo, retamos al lector a que aplique una superficie esférica, o un pedazo pequeño de ésta sobre un plano. . . La esfera no puede aplicarse sobre un plano.

Para terminar con la época en que Gauss se interesó fundamentalmente por la geodesia, diremos que esta etapa fue una de las más productivas; durante la década 1818-1828 publicó 69 trabajos, por supuesto que no todos de geodesia.

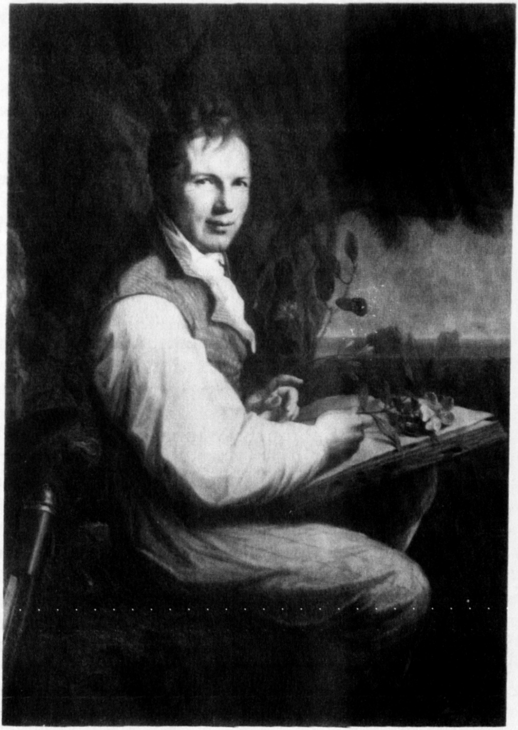
Gauss y la física

Cuando Gauss decidió abandonar el trabajo de campo de su proyecto geodésico, lo hizo en parte por razones de salud, además de que ya se habían cumplido la mayoría de las expectativas que lo llevaron a desarrollar ese proyecto. A partir de su decisión, quiso dedicarse al trabajo tranquilo en su estudio y retomó sus trabajos en matemáticas puras: dio forma final a sus investigaciones en superficies, obtuvo algunos resultados en teoría de números y sintetizó todo su trabajo sobre funciones elípticas. En esta época, cuando tenía 48 años, sintió que cada vez le costaba más trabajo llegar a resultados importantes. Esa sensación se refleja en una carta que envió a Olbers en 1826, en la que le dice que nunca había trabajado tanto obteniendo tan pocos resultados, y que casi estaba convencido de que debía buscar un nuevo campo de investigación. Este sentimiento se agudizó al ver que brillantes jóvenes de la nueva generación estaban desarrollando independientemente algunas de sus ideas originales. Por ejemplo, Gauss no respondió, nada cuando en 1825 Abel le escribió para mostrarle su demostración de la imposibilidad de resolver mediante radicales la ecuación de quinto grado. Gauss y Abel nunca se conocieron, pero en cartas privadas de Gauss aparecen elogios al joven matemático. También Dirichlet le escribió enviándole sus primeros resultados en teoría de números, y solicitando opiniones y guía; Gauss le respondió evasivamente meses después, aunque más tarde, también en una carta a un amigo, se mostró asombrado por el talento de este otro joven, pero dijo que no deseaba involucrarse matemáticamente con él. Cuando en 1828 le pidieron un artículo, respondió que Jacobi había desarrollado sus resultados "con tal sagacidad, penetración y elegancia, que pienso que no debo publicar mi trabajo". Estos ejemplos muestran cómo, quizá por su situación familiar de aquellos años y por haber trabajado demasiado, Gauss estaba frustrado y subestimaba su trabajo, cosa que nunca antes había hecho. En efecto, un cambio de área de investigación le vino muy bien, y mostró que aún le quedaba mucho por hacer.

En repetidas ocasiones, desde 1802, Alexander von Humboldt había intentado que Gauss fuera a vivir a Berlín como la figura principal de la gran academia que esperaba formar ahí. Gauss no rechazó esta propuesta, pero nunca la llevó a cabo por diferentes problemas personales y burocráticos. Humboldt nunca cesó en sus intentos por atraer a Gauss aunque fuera en sus proyectos personales, como el de organizar observaciones geomagnéticas en todo el mundo. En 1828 Humboldt convenció a Gauss de asistir a una convención en Berlín que marcaba el comienzo de un gran proyecto científico alemán. La reunión no motivó a Gauss en lo más mínimo, pero su estancia de tres semanas en Berlín, en la casa de Humboldt, fue decisiva. Al tener largos momentos de tranquilidad y poder ver el equipo científico de Humboldt, Gauss decidió dedicarse al magnetismo.

Cuando más tarde Humboldt le escribió a Gauss comunicándole su satisfacción por haberlo interesado en el magnetismo, éste le respondió, como de costumbre con muy poco tacto, que el magnetismo le interesaba desde hacía treinta años. Esto se confirmó después mediante algunas anotaciones de Gauss del momento correspondiente; retrasó su trabajo serio en este campo en parte por la falta de aparatos de medición.

De cualquier manera, la visita de Gauss a Berlín lo hizo decidirse por emprender investigaciones en esta rama de la física. Otro factor importante fue que en la convención conoció a Wilhelm Weber, brillante y joven físico experimental con quien habría de colaborar mucho en los siguientes años.



Alexander von Humboldt era una figura importante en la Alemania de Gauss.

Aunque la decisión de Gauss de dedicarse al estudio del magnetismo fue tomada en 1828, no fue sino hasta 1831 que realmente comenzó, debido a que en ese año llegó Weber a Gotinga. Sin embargo, en ese pequeño lapso Gauss hizo algunas investigaciones en física, como preparación para atacar el magnetismo cuando llegara su amigo. Publicó trabajos de mecánica, capilaridad, acústica, óptica y cristalografía. También en esos años apareció un importante trabajo suyo sobre cálculo de variaciones, un área de las matemáticas que resultó ser muy importante para la física teórica.

Weber llegó a Gotinga en 1831, dos días después de la muerte de Minna, la segunda esposa de Gauss. Tenía la mitad de la edad de su colega, y congeniaron muy bien desde un principio. Las diferentes aptitudes de cada uno se complementaron adecuadamente y pronto comenzaron a obtener resultados. En un principio, motivados por la reciente publicación de Faraday de su principio de inducción, en 1831, se dedicaron a investigar fenómenos eléctricos y llegaron a resultados importantes, aunque nunca los publicaron, quizá porque su interés se centraba en el magnetismo.

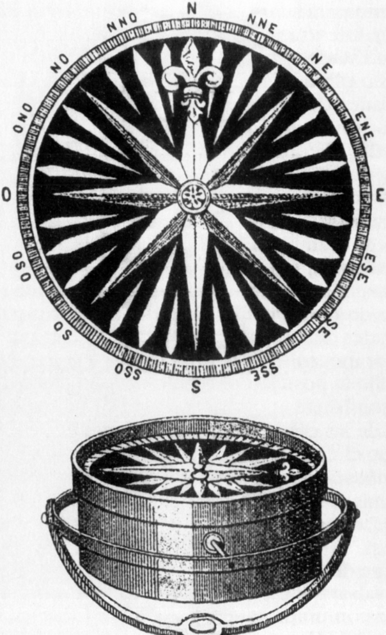
Como resultado de sus investigaciones, Gauss y Weber fueron de los primeros en darse cuenta de que era posible transmitir mensajes por medio de electricidad e inventaron el primer telégrafo eléctrico, el cual conectaron después de varias pruebas entre el laboratorio de física y el observatorio de Gauss, recorriendo una distancia de 2.3 km de largo, mediante un cable doble que se rompió innumerables veces. Los primeros mensajes fueron transmitidos en 1833. Funcionó bastante bien, y lo utilizaron para comunicarse rutinariamente. En esa época en que en Europa estaban funcionando los primeros ferrocarriles, Weber visualizó claramente lo que el telégrafo significaría para la civilización: "Cuando el globo terráqueo esté cubierto con una red de ferrocarriles y alambres telegráficos, esta red prestará servicios comparables a los del sistema nervioso en el cuerpo humano, en parte como un medio de transporte, en parte como un medio para la propagación de las ideas y sensaciones, con la rapidez de la luz."

Gauss se dio cuenta de la importancia militar y económica que podía tener el invento y trató de promoverlo en el gobierno para su uso a gran escala. No tuvo éxito en su intento, y mientra tanto Steinheil en Munich, en 1837, y Morse en Estados Unidos, en 1838, independientemente, inventaron otros telégrafos más eficientes y con mejores posibilidades de ser explotados. El telégrafo de Gauss y Weber fue olvidado.

Los dos científicos juntos realizaron trabajos tanto experimentales como teóricos relacionados con el magnetismo. Inventaron un magnetómetro y organizaron una red de observadores en todo el mundo, a fin de medir las variaciones del campo magnético de la Tierra. Por otro lado Gauss demostró, por medio de un análisis teórico, que el campo magnético se producía en el interior de la Tierra, resultado de considerable importancia porque limita las posibilidades del origen del campo, concentrando la atención en los mecanismos geofísicos de su generación. Además predijo la posición probable del polo sur magnético, que fue confirmada posteriormente por un explorador.

Otra de las contribuciones de Gauss y Weber en este campo fue el establecimiento de un sistema de unidades llamado *absoluto*, que se utiliza hasta la fecha. Como un reconocimiento al trabajo de Gauss en magnetismo, una de las unidades actuales para medir la inducción magnética es el *gauss*. El campo magnético de la Tierra es aproximadamente de 1 gauss.

La colaboración de Gauss con Weber terminó repentinamente con un problema político en Gotinga: en 1837 el nuevo rey de Hannover abrogó la constitución de 1833, que era razonablemente progresista. Un grupo de siete profesores de Gotinga, entre ellos Weber y el orientalista G. H. A. von Ewald, enviaron una carta de protesta al gabinete. Poco después "los siete de Gotinga" tuvieron que



Además de los trabajos en matemáticas y astronomía, Gauss obtuvo importantes resultados en el estudio del magnetismo terrestre.

dejar la universidad, y algunos incluso el país. Tras algunos años Weber fue reinstalado en su puesto, pero ya era demasiado tarde para reiniciar sus colaboraciones con Gauss, pues éste había decidido abandonar las investigaciones en ese campo. Weber siguió su brillante carrera solo.

La teoría del electromagnetismo que sintetizó Maxwell* después del trabajo experimental y teórico de muchos científicos, y que actualmente sigue siendo utilizada, se reduce a cuatro ecuaciones fundamentales, conocidas como las ecuaciones de Maxwell. Una de éstas es la ley de Gauss, que describe cómo es el campo eléctrico producido por una distribución de cargas eléctricas. Gauss estableció esta ley partiendo de la ley de Coulomb, que describe la fuerza de atracción o de repulsión entre dos cargas eléctricas. Gauss fue el primero en destacar el carácter básico de esta ley y, generalizándola y dándole una estructura matemática vectorial, llegó a la suya.

Una de las últimas aportaciones significativas de Gauss fue un trabajo sobre dióptrica publicado en 1841, en el que analiza la trayectoria de la luz en un sistema de lentes, y demuestra que cualquier sistema es equivalente a una sola lente apropiadamente elegida.

Los últimos 15 años de Gauss

Gauss trabajó sin cesar hasta el final de su vida, aunque a partir de 1840 sus investigaciones fueron menos importantes en cuanto a resultados novedosos. En esos años casi nunca salió de Gotinga, y se volvió más recluido y desinteresado por el trabajo de otros científicos. Ni el trabajo de Kummer de 1845 sobre los ideales (estructuras matemáticas con propiedades demasiado complejas como para deternos a explicarlas), ni el descubrimiento de Neptuno por

*Véase, en esta misma colección, *El inventor del porvenir. James Clerk Maxwell*, de Bram de Swan.

Adams, Le Verrier y Galle en 1846, parecieron interesarle demasiado. Sin embargo, siguió haciendo observaciones astronómicas, magnéticas, y trabajando en los últimos detalles del proyecto de Hannover. Por supuesto que continuó investigando algunos aspectos de la teoría de números y otros de la geometría.

En esa época Gauss mostró una mejor disposición hacia la enseñanza, quizá porque tuvo discípulos realmente brillantes como Dedekind, Riemann y Cantor; además, en opinión de quienes estuvieron cerca de él en ese periodo, era buen maestro, buen conferencista y buen divulgador de las ideas científicas. Si no desarrolló a lo largo de su vida estas actividades fue sólo porque no quiso. Al revisar los cursos que impartió vemos que la mayoría fueron de astronomía y unos pocos de teoría de números y otras ramas de las matemáticas puras. Dedekind describe así al maestro Gauss en esa época: ". . .normalmente se sentaba cómodamente, mirando hacia abajo, algo inclinado, con las manos cruzadas sobre las piernas. Hablaba despacio con claridad y sencillez; pero cuando quería enfatizar un nuevo punto de vista, en el que había utilizado una palabra especialmente característica, repentinamente levantaba la cabeza, volteaba hacia alguno de los alumnos sentados cerca de él, y lo miraba con sus bellos y penetrantes ojos azules durante el enfático discurso. . . Si procedía de la explicación de algunos principios al desarrollo de fórmulas matemáticas, entonces se levantaba, y en una postura estable y muy recta escribía en el pizarrón junto a él con su peculiar buena letra; siempre ocupaba poco espacio y era escrupulosamente ordenado. Para los ejemplos numéricos, en los que ponía especial interés, llevaba los datos requeridos en tiritas de papel."

Nunca abandonó su gusto por la filología, y en particular por el estudio de las lenguas. Como gimnasia mental, decidió aprender ruso por sí mismo, y en poco tiempo lo escribía, leía y hablaba con bastante soltura. Poco después empezó a estudiar sánscrito, pero no le gustó y lo abandonó.

Siempre estuvo muy pendiente de los acontecimientos políticos del mundo. Dedicaba una hora diaria a visitar bibliotecas para leer todos los diarios, desde el *Times* de Londres hasta las revistas locales. Además era un asiduo lector; le atraía especialmente la literatura inglesa, aunque algunos aspectos trágicos de Shakespeare no eran adecuados para su aguda sensibilidad porque realmente lo hacían sufrir mucho. Le gustaba mucho Walter Scott, contemporáneo suyo, y leía sus libros en cuanto eran publicados, aunque el triste final de *Kenilworth* lo apesadumbró durante varios días y se arrepintió de haberlo leído. Disfrutaba mucho leyendo obras históricas como *La decadencia y caída del Imperio romano*, de Gibbon, por ejemplo. Mostró una marcada antipatía por lord Byron. De los escritores alemanes le gustaba mucho Jean Paul, y no se identificó mucho con Goethe ni con Schiller. Respecto a la música, le gustaban tan sólo las canciones ligeras

A diferencia de Newton, a Gauss en sus últimos años no le agradó ocupar cargos públicos, aunque se dice que hubiera sido un buen ministro de Hacienda, dados su agudo interés y sagacidad en las cuestiones relacionadas con estadística, finanzas, seguros, etcétera, lo que hoy llamaríamos cálculo actuarial, área en la que Gauss también hizo investigaciones en sus últimos años. Quizá motivado por estas investigaciones adquirió el hábito de coleccionar todo tipo de datos estadísticos con los que se topaba en los diarios, libros o revistas.

En 1849 se le hizo un homenaje por los cincuenta años de su doctorado. Recibió muchos honores y en esa ocasión presentó su cuarta demostración del teorema fundamental del álgebra, para recordar que su trabajo doctoral en 1799 había sido la primera demostración de este teorema.

El prestigio que llegó a adquirir Gauss en vida le proporcionó satisfacciones muy grandes: muchos jóvenes matemáticos estudiaron su obra; por ejemplo, Abel y Jacobi declararon que su trabajo en funciones elípticas había sido motivado por la *Disquisitiones arithmeticae*, y el brillante

Las correrías de Ivanhoe, caballero inglés del siglo XII, se han convertido en la más conocida de las historias de Walter Scott, a las que Gauss era aficionado.

joven francés, Evariste Galois, dijo un poco antes de morir en un duelo, a los 20 años de edad, que por favor su trabajo le fuera mostrado a Gauss. Estos tres matemáticos son considerados actualmente como pilares de la matemática moderna.

Por los extremos cuidados que tenía Gauss en cuanto a dieta y hábitos, no tuvo mayores problemas de salud desde la época en que realizó trabajo de campo para el proyecto de geodesia, aunque continuamente permaneció bajo vigilancia médica. Por otro lado, aumentaron sus estados depresivos y de profunda melancolía. Llevaba una vida muy reposada y permaneció muy aislado, dedicándose casi exclusivamente a su trabajo. Seguía yendo al observatorio, pero poco tiempo cada día. Hizo su última observación astronómica en 1851, a los 74 años de edad; ese mismo año aprobó la tesis doctoral de Riemann sobre los fundamentos del análisis complejo. Al año siguiente seguía trabajando en algunos problemas matemáticos y en un péndulo de Foucault mejorado. (El péndulo de Foucault es un aparato con el que se demuestra la rotación de la Tierra.) Entre 1853 y 1854, Riemann escribió su obra maestra sobre los fundamentos de la geometría, trabajo que Gauss había elegido para que aquél lo desarrollara. Después de haber estado varios meses bajo tratamiento médico, Gauss tuvo el placer de asistir a la famosa conferencia de aceptación de Riemann por la universidad de Gotinga, sobre el trabajo citado. Para Gauss esto fue el símbolo de la presencia en Alemania de alguien capaz de continuar sus ideas. Weber cuenta que en el camino de regreso de la conferencia Gauss estaba profundamente emocionado.

Por primera vez en 20 años, el matemático salió de Gotinga el 16 de junio de 1854, para ver el ferrocarril que se estaba tendiendo entre su ciudad y Kassel. Siempre había tenido interés por la construcción de ferrocarriles pero esta vez, en su intento por satisfacer su curiosidad, se desbocaron los caballos de su coche, y al ser despedido del carruaje sufrió una fuerte conmoción. Logró recuperarse y participar en la celebración cuando llegó el tren a Gotinga el 31 de julio del mismo año. A partir de ese día, la declinación de Gauss se precipitó rápidamente.

A principios de 1855 empezó a sufrir de dilatación cardiaca, disnea y algunos síntomas de hidropesía. Después de una intensa lucha por la vida, murió pacíficamente en la madrugada del 23 de febrero de 1855, sin haber cumplido los 78 años de edad.

Gauss está enterrado en Gotinga, donde vivió la mayor parte de su vida. A sus funerales fueron funcionarios del gobierno y de la universidad, y estuvieron presentes personalidades importantes y jóvenes científicos, como Dedekind y por supuesto Weber.

El cerebro de Gauss, con sus numerosas y profundas circunvoluciones, se encuentra en una colección anatómica en la Universidad de Gotinga.

En su ciudad natal, Brunswick, se erigió una estatua de Gauss que, como homenaje a un momento especial de su vida, tiene un pedestal que es un polígono regular de 17 lados. Pocos años después de su muerte se acuñaron en Alemania monedas con su rostro.

La mayor parte de sus biógrafos y muchos científicos coinciden en aseverar que Arquímedes, Newton y Gauss han sido los más grandes matemáticos de todos los tiempos. Como un tributo a la monumental obra de Gauss, se le conoce como el príncipe de las matemáticas.

Textos de Gauss

Disquisitiones arithmeticae

Respecto a la congruencia de números en general

Congruencia de números, módulo, residuos y no residuos

Que un número divida a otro significa que, al hacer la división, el resultado es exacto. Por ejemplo, 3 divide a 15, pero 4 no divide a 13. Para que un número divida la diferencia de otros dos, hay que hacer primero la resta de éstos; aquél debe dividir a esta resta, es decir, 4 divide a la diferencia entre 13 y 5, porque 13 - 5 = 8 y 4 divide a 8.

1. Si un número *a* divide a la diferencia de los números *b* y *c*, se dice que *b* y *c* son congruentes con respecto a *a*; y si no, incongruentes. Llamamos a *a* el módulo. En el primer caso, cada uno de los números *b* y *c* es llamado el residuo del otro, y en el último caso, un no residuo.

Estas nociones se aplican a todos los números enteros tanto positivos como negativos, pero no a los fraccionarios. Por ejemplo, −9 y +16 son congruentes con respecto al módulo 5; −7 es un residuo de +15 con respecto al módulo 11, pero un no residuo con respecto al módulo 3. Ahora bien, dado que todo número divide a cero, entonces todo número puede ser considerado congruente a sí mismo con respecto a cualquier módulo.

2. Si k denota un número entero no determinado, todos los residuos de un número dado a con respecto al módulo m están contenidos en la fórmula $a + km$. Las proposiciones razonables que hemos dado pueden ser fácilmente demostradas desde este punto de vista; pero cualquiera puede percibir su verdad a primera vista.

Si ponemos $b = a + km$ y despejamos km, resulta $km = b - a$, donde claramente se ve que b y a son congruentes con respecto al módulo m.

Denotaremos en lo futuro la congruencia de dos números por el signo $\equiv$, y contiguo el módulo en paréntesis cuando sea necesario. Por ejemplo, $-16 \equiv 9 \pmod 5$, $-7 \equiv 15 \pmod{11}$.

Esta manera de representar a las congruencias fue introducida por Gauss, y hasta la fecha es utilizada ampliamente.

3. *Teorema. Si se dan* m *números enteros consecutivos* a, a + 1, a + 2, . . ., a + m - 1, *y otro número entero cualquiera* A, *entonces alguno de los primeros será congruente a este número* A *con respecto al módulo* m; *y de hecho habrá sólo uno de tales números.*

Si, por ejemplo, $\frac{a-A}{m}$ es un entero, tendremos $a \equiv A$; pero si éste es fraccional, sea k el entero inmediato mayor (o, cuando es negativo, in-

Por ejemplo, si $m = 3$, $A = 5$, $a = 11$, el teorema afirma que de los números 11, 12 y 13, uno, y solamente uno, es congruente a 5 con respecto al módulo 3; en este caso resulta ser el 11. Si elijo otros tres números consecutivos cualesquiera (es decir, si ahora a = 30), como 30, 31 y 32, el 5 vuelve a ser congruente con alguno de ellos respecto al módulo 3, a saber, el 32.

Q. E. D. es la abreviatura de la frase latina *Quod erat demonstrandum*, que significa "que era lo que se quería demostrar" y se pone al final de la prueba de un teorema o una proposición.

Para obtener el residuo mínimo absoluto, de todos los números que son congruentes con un número dado se elige el que tenga valor absoluto más pequeño.

mediatamente menor sin poner atención al signo). Entonces $A + km$ estará entre a y $a + m$, por lo que será el número deseado. Es evidente que todos los cocientes $\frac{a-A}{m}$, $\frac{a+1-A}{m}$, $\frac{a+2-A}{m}$, *etcétera,* están situados entre $k - 1$ y $k + 1$, por lo tanto no más de uno puede ser entero. Q. E. D.

Residuo mínimo

4. Para todo número tendremos entonces un residuo no sólo en la secuencia 0, 1, 2, . . ., $m - 1$, sino también en la secuencia 0, −1, −2, . . ., $-(m - 1)$. Llamaremos a éste el residuo mínimo. Ahora es evidente que a menos de que cero sea el residuo habrá siempre dos: uno positivo y otro negativo. Si éstos fueran de diferente magnitud uno de éstos sería menor que $\frac{m}{2}$; pero si fuesen de la misma magnitud cada uno sería igual a $\frac{m}{2}$ sin poner atención al signo. De lo anterior es evidente que cualquier número tiene un residuo que no excede la mitad del módulo. Este residuo será llamado el mínimo absoluto.

Por ejemplo, con respecto al módulo 5, −13 tiene el residuo mínimo positivo 2, el cual es al mismo tiempo el mínimo absoluto, y tiene a -3 como el residuo mínimo negativo. Con respecto al módulo 7, +5 es su propio residuo mínimo positivo y -2 su residuo mínimo negativo y al mismo tiempo mínimo absoluto.

Proposiciones elementales concernientes a congruencias

5. De la notación apenas establecida podemos derivar las siguientes proposiciones obvias sobre congruencia de números.

Los números que son congruentes con respecto a un módulo compuesto, serán ciertamente congruentes con respecto a cualquiera de sus divisores.

Si varios números son congruentes al mismo número con respecto al mismo módulo, serán congruentes entre sí (con respecto al mismo módulo).

La misma identidad de módulo debe ser entendida como sigue: los números congruentes tienen el mismo residuo mínimo, los números incongruentes diferentes residuo mínimo.

En Gotinga, este monumento recuerda la intensa y productiva labor que llevaron a cabo, juntos, Gauss y Weber.

6. Si los números A, B, C, *etcétera*, y los números a, b, c, *etcétera*, son congruentes por pares, esto es, si $A \equiv a$, $B \equiv b$, $C \equiv c$, *etcétera*, con respecto a un módulo cualquiera, entonces tendremos que $A + B + C$ + *etcétera* $\equiv a + b + c$ + *etcétera*.

Si $A \equiv a$ y $B \equiv b$, debemos tener $A - B \equiv a - b$

7. Si $A \equiv a$ debemos tener también $kA \equiv ka$.

Si k es número positivo, esto es solamente un caso particular de la proposición del artículo precedente cuando ponemos $A = B = C$, *etcétera*, y $a = b = c$, *etcétera*. Si k es negativo, $-k$ será positivo. Entonces $-kA \equiv -ka$ y consecuentemente $kA \equiv ka$.

Si $A \equiv a$ y $B \equiv b$ debemos tener $AB \equiv ab \equiv Ab \equiv Ba$

8. Si los números A, B, C, *etcétera*, y los números a, b, c, *etcétera*, son congruentes por pares, esto es, si $A \equiv a$, $B \equiv b$, $C \equiv c$, *etcétera*, el producto de los números de cada conjunto será congruente, esto es, ABC, *etcétera* $\equiv abc$, *etcétera*.

Del artículo precedente, $AB \equiv ab$, y por la misma razón, $ABC \equiv abc$; de igual manera podemos considerar tantos factores como deseemos.

Si consideramos todos los números *A*, *B*, *C*, *etcétera*, iguales, y también los correspondientes números *a*, *b*, *c*, *etcétera*, obtenemos este teorema.

Si $A \equiv a$ y si k es un número positivo, debemos tener $A^k \equiv a^k$

9. Sea X una función de la variable x de la forma $Ax^a + Bx^b + Cx^c +$ *etcétera,* donde *A*, *B*, *C*, *etcétera,* denotan cualquier número entero y *a*, *b*, *c*, *etcétera*, números enteros no negativos. Si ahora a la variable x se le asignan valores que sean congruentes con respecto a cualquier módulo preestablecido, los valores resultantes de la función X serán entonces congruentes.

Se están considerando todas las propiedades que se mencionaron antes.

Sean f y g dos valores congruentes de x. Entonces, por el artículo precedente, $f^a \equiv g^a$ y $Af^a \equiv Ag^a$, de la misma manera $Bf^a \equiv Bg^a$, *etcétera*. Por lo tanto, $Af^a + Bf^b + Cf^c +$ *etcétera* $\equiv Ag^a + Bg^{b+} Cg^c +$ *etcétera*. Q. E. D.

Es fácil de ver, también, cómo estos teoremas pueden ser extendidos a varias variables.

10. Si, por consiguiente, todos los números enteros consecutivos son sustituidos por x, y si los valores de la función X están reducidos a residuos mínimos, estos residuos constituirán una secuencia en la cual los mismos términos se repetirán después de un intervalo de m términos (m denota al módulo); o en otras palabras, esta secuencia estará formada por un periodo de m términos repetidos indefinidamente. Sea, por ejemplo, $X = x^3 - 8x + 6$ y $m = 5$. Entonces para $x = 0, 1, 2, 3$, etcétera, los valores de X dan los residuos mínimos positivos 1, 4, 3, 4, 3, 1, 4, etcétera, donde los primeros cinco, es decir, 1, 4, 3, 4, 3, se repiten sin fin. Y más aún, si se continúa la secuencia hacia atrás, esto es, si a x se le asignan valores negativos, el mismo periodo ocurre en orden inverso. Es evidente, por consiguiente, que términos diferentes que constituyen a ésta no pueden ocurrir en la secuencia.

11. En este ejemplo, entonces, X no puede ser ni congruente a 0 ni congruente a 2, módulo 5, y menos aún puede ser igual a 0 o a 2. De donde se sigue que las ecuaciones

$x^3 - 8x + 6 = 0$ y $x^3 - 8x + 4 = 0$ no pueden ser solubles en los números racionales. Es evidentemente cierto, en general, que si es imposible satisfacer la congruencia $X \equiv 0$ con respecto a algún módulo en particular, entonces la ecuación $X = 0$ no tiene raíces racionales cuando X es una función de la variable x de la forma $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} =$ *etcétera* $+ N$, donde A, B, C, *etcétera*, son enteros y n es un entero positivo. (Es bien sabido que toda ecuación algebraica puede ser llevada a esta forma.) Este criterio, presentado aquí de una manera natural, será tratado en forma más extensa en la sección VII. De esta breve indicación alguna idea, sin duda, puede formarse observando la utilidad de estas investigaciones.

Algunas aplicaciones

Muchos de los teoremas comúnmente enseñados en aritmética dependen de teoremas dados en esta sección; por ejemplo, la regla para comprobar la divisibilidad de un número por 9, 11 u otros números, se apoya en que, con respecto al

La prueba para saber si un número es divisible entre 9 es sumar módulo 9, todas las potencias de 10 son congruentes a la unidad. Por lo tanto, si el número dado es de la forma $a + 10b + 100c +$ *etcétera,* tendremos, con respecto al módulo 9, el mismo residuo mínimo $a + b + c +$ *etcétera*. De esto es evidente que si las cifras individuales del número, expresadas en forma (o escala) decimal, son sumadas sin importar su posición, esta suma y el número dado exhibirán el mismo residuo mínimo; y más aún, este último puede ser dividido por 9 si el primero es divisible por 9 e inversamente. La misma cosa también es cierta para el divisor 3. Dado que con respecto al módulo 11, $100 \equiv 1$, tendremos generalmente $10^{2k} \equiv 1$ y $10^{2k+1} \equiv 10 \equiv -1$. Entonces, un número de la forma $a + 10b + 100c +$ *etcétera*, tendrá, con respecto al módulo 11, el mismo residuo mínimo que $a + b + c +$ *etcétera*. De donde la conocida regla se deriva inmediatamente. Sobre los mismos principios todas las reglas similares son fácilmente deducidas.

todos sus dígitos y ver si el resultado es o no divisible entre 9. Por ejemplo, 729 es divisible entre 9, ya que $7 + 2 + 9 = 18$, que claramente es divisible entre 9.

Las observaciones anteriores también nos conducen a los fundamentos de los principios de las reglas comúnmente empleadas para la verificación de las operaciones aritméticas. Estas observaciones, de seguro, son aplicables cuando de los números dados hemos deducido otros por adición, sustracción, multiplicación o elevación a una potencia: en lugar de los números dados basta sustituir su residuo mínimo con respecto a un módulo arbitrario (generalmente 9 u 11, dado que, como acabamos de observar, en nuestro sistema decimal los residuos con respecto a estos módulos pueden ser fácilmente encontrados). Estos números así obtenidos deben ser congruentes a éstos que han sido deducidos de los números dados. Si éste no fuera el caso, inferimos que se ha cometido un error en los cálculos.

Ahora bien, como estos resultados y otros de similar naturaleza son muy conocidos, no servirá a nuestros propósitos explayarse más sobre éstos.

Cómo jugar con las matemáticas de Gauss

Acerca del polígono regular de 17 lados

Respecto al hallazgo que motivó que Gauss dedicara su vida a las matemáticas, él mismo cuenta que: "Meditando obstinadamente, y sobre bases aritméticas, acerca de la dependencia recíproca entre todas las raíces de la ecuación divisora de la circunferencia, durante unas vacaciones en Brunswick (antes de levantarme de la cama) logré ver esta dependencia del modo más claro, de modo que pude hacer la aplicación particular al polígono de 17 lados, y la oportuna comprobación numérica. El día fue el 29 de marzo de 1796, y la casualidad apenas tuvo parte en ello."

Gauss resolvió algebraicamente y de manera general el problema de la construcción de polígonos regulares con regla y compás; por eso nos habla de la ecuación divisora de la circunferencia, y de la aplicación particular al polígono de 17 lados.

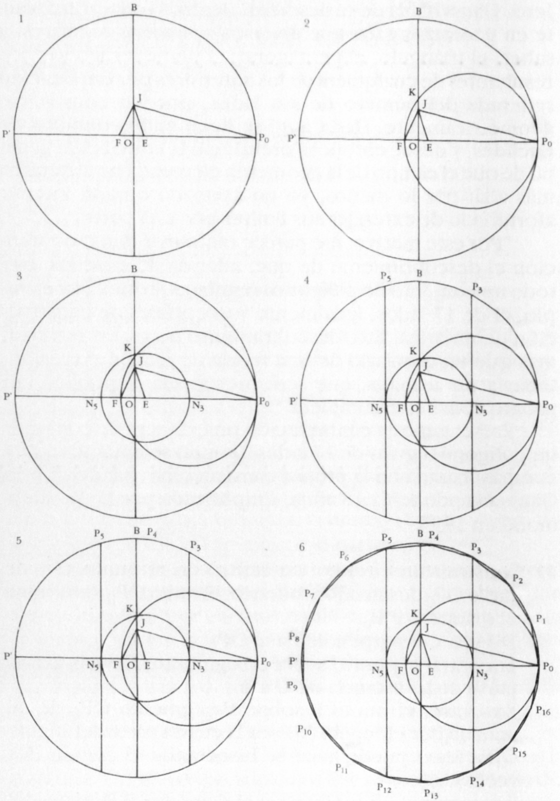
El diario personal que Gauss comenzó a escribir el día que se decidió por las matemáticas, con anotaciones muy escuetas, casi siempre referentes a sus investigaciones, no fue encontrado sino hasta 1899; la primera anotación es la siguiente: "1796. Los principios en que se apoya la división del círculo en 17 partes, y la correspondiente construcción geométrica, etcétera. 29 de marzo, Brunswick."

En un artículo publicado en el periódico literario de Jena, Gauss habla de su descubrimiento. "Todo principiante en geometría sabe que diversos polígonos regulares, a saber, el triángulo, el pentágono, el pentadecágono y los resultantes de cualquiera de los anteriores por duplicación reiterada del número de sus lados, pueden construirse geométricamente. Hasta aquí se llegó en los tiempos de Euclides, y desde entonces prevaleció la convicción general de que el campo de la geometría elemental no alcanzaba más allá; por lo menos, yo no conozco ningún intento afortunado de extender sus límites por esta parte.

"Por este motivo, me parece tanto más digno de atención el descubrimiento de que, además de aquéllos, hay todo un conjunto de polígonos regulares, como, por ejemplo, el de 17 lados, igualmente susceptibles de construcción geométrica. Este descubrimiento no es, en realidad, más que un corolario de una teoría de mayor extensión, todavía no acabada, que será presentada al público tan pronto como esté completa."

Presentamos a continuación una manera de construir un polígono regular de 17 lados, usando solamente regla y compás, basada en la propia construcción que descubrió Gauss cuando tenía 18 años, simplificada por H. W. Richmond en 1893.

1) Construir un círculo con centro en el punto O y de radio OP_0 de tamaño arbitrario. El radio OP_0 determina el diámtero $P'P_0$.
Dibujar OB perpendicular a OP_0.
Encontrar el punto J sobre el segmento OB y a la cuarta parte de la distancia de O a B.
Encontrar el punto E sobre el segmento OP_0 de tal manera que el ángulo OJE sea la cuarta parte del ángulo OJP_0 (esto puede hacerse bisectando el ángulo dos veces).
Encontrar el punto F sobre el diámetro $P'P_0$ pero del lado contrario al que ocupa el punto E, con respecto



Esquema de construcción del polígono de 17 lados.

a OB, de tal manera que el ángulo FJE sea de 45 grados (esto puede hacerse bisectando un ángulo recto).

2) Construir un círculo cuyo diámetro sea FP_0. Este círculo intersecta a OB en el punto K.

3) Construir otro círculo con centro en E y radio EK. Este círculo define los puntos N_3 y N_5 al intersectar a $P'P_0$.

4) Trazar las líneas N_3P_3 y N_5P_5 perpendiculares a $P'P_0$.

5) Bisectar el arco P_3P_5 para obtener P_4.

6) Usando la cuerda P_3 P_4 pueden obtenerse los demás puntos sobre la circunferencia; uniéndolos se obtiene el polígono.

Juego calendárico

En el calendario gregoriano modificado, que utilizamos en la actualidad, el 1º de enero cae eventualmente en cada uno de los siete días de la semana, dando lugar a siete diferentes calendarios anuales posibles para los años comunes y a otros siete para los bisiestos. La secuencia de estos 14 calendarios no es del todo ordenada. Por ejemplo: si el 1º de enero cae en domingo en un año común, el siguiente año caerá en lunes. El día se recorre un lugar debido a que el número 365 (número de días de un año común) no es divisible entre 7 (los días de la semana), y al hacer la división sobra precisamente 1. Dicho en término matemáticos $365 \equiv 1$ (módulo 7). Si este nuevo año tampoco es bisiesto, el siguiente 1º de enero caerá en martes, y si este nuevo año aún no es bisiesto, el que le sigue comenzará en miércoles. Sin embargo, como ya llevamos tres años comunes consecutivos, este último es bisiesto y tiene un día más, por lo que el año que le sigue no empezará en jueves sino en viernes; hay un brinco de dos días debido a que $366 \equiv 2$ (módulo 7). Al seguir con este procedimiento se encuentra que después de cierto tiempo hay una secuencia en los calendarios. Dada esta naturaleza cíclica es posible resolver problemas calendáricos como el de encontrar el día de la semana en que cayó cierta fecha, mediante aritmética de congruencias.

Para encontrar la solución general, la mejor aproximación es considerar los parámetros que determinan completamente el día de la semana. Comencemos estableciendo un punto de origen para el calendario, que debe ser una fecha de la que sepamos en qué día de la semana cayó; en nuestro caso adoptaremos como origen el 1º de enero de 1900, que fue lunes. Para averiguar el día de la semana en que cae cualquier fecha de nuestro siglo seguiremos los siguientes pasos: primero determinamos el día en que cae el 1º de enero del año en cuestión. Como cada año común que pasa se recorre un día, y cada bisiesto dos, hay que contar el número de años transcurridos desde el origen a nuestra fecha y el número de años bisiestos.* Por ejemplo, pensemos en qué día cayó el 1º de enero de 1942. Desde el origen transcurrieron 42 años, de los cuales $42/4 = 10$ (no importa el residuo) fueron bisiestos. Entonces, el 1º de enero de 1942 se recorrió $42 + 10 = 52$ veces. Si dividimos 52 entre 7 obtenemos un residuo de 3, esto es $52 \equiv 3$ (módulo 7), lo que significa que es equivalente a un recorrimiento de 3 días; como empezamos en lunes, al recorrerlo tres veces concluimos que el 1º de enero de 1942 fue jueves. Nótese que si el año en cuestión es bisiesto, hay que restar una unidad al número de años bisiestos transcurridos desde el origen, ya que el día extra que aporta ese año bisiesto es hasta el 29 de febrero. Por lo tanto, en nuestro esquema general definiremos un parámetro de año bisiesto que vale -1 si la fecha en cuestión es enero o febrero de un año bisiesto, y 0 en cualquier otro caso.

Ahora contamos con toda la información necesaria para determinar el día de la semana en que cae el 1º de enero de cualquier año de este siglo. Para cualquier otro caso basta sumar el número de días transcurridos desde el comienzo del año. Para hacer esto nos conviene sumar los

*El año 1900 no fue bisiesto; más adelante, en el texto se explica por qué.

días del mes en cuestión y los días acumulados en el año hasta el mes anterior. Para esto nos conviene tener a la mano un cuadro con los días acumulados en un año hasta cierto mes. Por ejemplo, hasta antes de enero hay 0 días acumulados, hasta antes de febrero 31, de marzo 59, de abril 90, etcétera. De hecho, nos importa básicamente el residuo de estos números después de ser divididos entre 7, que nos dice cómo se recorren los días de la semana cada mes. A estos residuos los llamaremos índices del mes.

Mes	*Índice*	
enero	0	
febrero	3	ya que $31 \equiv 3$ (módulo 7)
marzo	3	ya que $59 \equiv 3$ (módulo 7)
abril	6	ya que $90 \equiv 6$ (módulo 7)
mayo	1	ya que $120 \equiv 1$ (módulo 7)
junio	4	ya que $151 \equiv 4$ (módulo 7)
julio	6	ya que $181 \equiv 6$ (módulo 7)
agosto	2	ya que $212 \equiv 2$ (módulo 7)
septiembre	5	ya que $243 \equiv 5$ (módulo 7)
octubre	0	ya que $273 \equiv 0$ (módulo 7)
noviembre	3	ya que $304 \equiv 3$ (módulo 7)
diciembre	5	ya que $334 \equiv 5$ (módulo 7)

Por último, asignemos un número a cada día de la semana, 1 al lunes, 2 al martes, etcétera, hasta 7 al domingo. Ahora tenemos un método general para determinar el día en que cae cualquier fecha de nuestro siglo. Determinemos el día de la semana en que caerá el 31 de diciembre de 1999. Debemos determinar la siguiente suma:

número de años (desde el origen)		99
número de años bisiestos		24
parámetro de año bisiesto		0
índice del mes de diciembre		5
días transcurridos de diciembre		31
	total	159

Como al dividir 159 entre 7 sobran 5, es decir, $159 \equiv 5 \pmod 7$, concluimos que el 31 de diciembre de 1999 cae en el día 5, es decir, en viernes. Ahora sabemos también que el 1º de enero del año 2000 será sábado.

Para encontrar el día correspondiente a una fecha de otro siglo se procede igual, sólo que hay que añadir un índice de siglo, que en nuestro caso fue 0 debido a que el siglo comenzó en lunes, día 1 en nuestro esquema. Pero por ejemplo en el caso del próximo siglo, que comienza en sábado (día 6), como ya vimos, al procedimiento descrito hay que agregarle cinco días que están antes del sábado. Es decir que el índice de siglo para el siglo XXI es 5. Para determinar otros índices de siglo basta averiguar en qué día cae el 1º de enero correspondiente. Es fácil averiguar como antes en qué día cae el 31 de diciembre de 2099 y así sabremos el primero de enero de 2100, que resulta ser viernes, y por lo tanto el índice de ese siglo es 4.

Para ajustar adecuadamente el calendario gregoriano, se decidió hace tiempo que de los años con terminación 00 sólo serían bisiestos aquellos que fueran múltiplos exactos de 400. Por ejemplo, 1900 no fue bisiesto, pero el año 2000 sí lo será. Esta convención hace que el calendario gregoriano actual tenga un ciclo de 400 años, lo cual redunda en que los índices de siglo se repitan cada cuatro siglos, lo cual simplifica nuestro esquema; los índices de siglo que nos basta saber son los siguientes:

Siglo	*Índice*
1900	0
2000	5
2100	4
2200	2

y a partir de éstos el índice se repite cíclicamente hacia el pasado y hacia el futuro.

Si queremos averiguar el índice de algún siglo bastará sumar de 400 en 400 hasta caer en uno de los siglos del cuadro, y el índice buscado será el correspondiente. Por ejemplo, averigüemos en qué día de la semana nació Gauss, cuya fecha de nacimiento es 30 de abril de 1777.

$$1700 + 400 = 2100$$

Por lo tanto el índice de siglo para 1700 es el mismo que el de 2100, es decir 4. Ahora hagamos el cálculo:

índice de siglo		4
número de años		77
años bisiestos		19
parámetro de año bisiesto		0
índice de abril		6
días de abril		30
	total	136

Al dividir 136 entre 7 se obtiene un residuo de 3, o sea que $136 \equiv 3$ (módulo 7). Por lo tanto Gauss nació el tercer día de la semana, es decir, un miércoles.

Otro tipo de problemas que podemos resolver es el de encontrar en qué mes o meses de 1994, por ejemplo, habrá martes 13. Se procede de igual manera, sólo que esta vez dejamos como incógnita el índice del mes. Veamos:

índice de siglo		0
años transcurridos		94
años bisiestos		23
parámetro de año bisiesto		0
índice del mes		x
días del mes transcurridos		13
	total	$130 + x$

La suma es $130 + x$. Ahora debemos encontrar para qué valores de x de 0 a 6 (véase el cuadro de índices de mes) se tiene

$$130 + x \equiv 2 \text{ (módulo 7)}$$

El 2 es debido a que queremos que el día 13 sea martes, 2 en nuestro esquema.

Para resolver esta congruencia basta con encontrar x entre 0 y 6 tal que

$$130 + x - 2 \text{ sea divisible entre } 7$$

es decir, $128 + x$, sea múltiplo exacto de 7.

Si $x = 5$ se obtiene lo deseado, ya que $133 = 19 \times 7$.

Al ver el cuadro de índices de mes vemos que nuestro resultado, $x = 5$, corresponde a los meses de septiembre y diciembre, lo que significa que en estos meses del año 1994 habrá martes 13.

Agradezco a Jaime Albarrán por la ayuda que proporcionó para escribir este libro.

Índice analítico y glosario

números enteros: Los números no fraccionarios positivos y negativos incluido el cero: {. . ., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, . . .}.
12, 25, 73, 74, 79, 80, 81

números imaginarios: Los números que resultan de sacar la raíz cuadrada de cualquier número real negativo. El nombre se debe a que se les atribuían características mágicas.
29, 30

números irracionales: Todos los números reales que no son racionales, como $\sqrt{2}$.
27

números naturales: Todos los números enteros positivos: {1, 2, 3, . . .}.
23, 24

números primos: Aquellos números naturales cuyos únicos divisores naturales son el uno y el propio número.
20

números racionales (o fraccionarios): Los números que resultan de dividir dos números enteros cualesquiera.
27, 73, 74, 81

números reales: La unión de todos los números racionales y los irracionales. Contienen a los naturales y a los enteros.
29, 30

números triangulares: Números que se expresan con la forma $\frac{n(n+1)}{2}$, donde n es un número natural.
23, 24

Olbers, Heinrich: Astrónomo y físico alemán (1758-1840) que descubrió los asteroides Pallas y Vesta.
37, 39-41, 46, 50, 59

Pallas: Uno de los asteroides más importantes, descubierto por Olbers.
32, 39

París
37, 40

Pfaff, Johann Friedrich: Matemático alemán (1765-1825), profesor de la Universidad de Helmstedt y gran amigo de Gauss.
25, 27, 34

Piazzi, Giuseppe: Astrónomo italiano (1746-1826) que descubrió el asteroide Ceres.
30, 39

polígono: Superficie plana limitada por rectas segmentadas. Gauss construyó por primera vez el polígono de 17 lados.
19, 20, 22, 23, 84, 86

polinomio: Expresión algebraica de varios términos.
27, 28

Pomerania
40

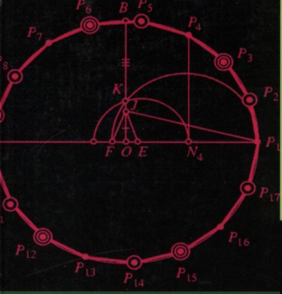
Prusia
35

Otros títulos en esta colección

El hombre de la torre inclinada. Galileo Galilei
Irene Cruz González, Abraham Nosnik, Elsa Recillas
El guardián de los herbarios del rey. Jean Baptiste de Lamarck
Victoria Schussheim, Eloy Salas
El inglés de la manzana. Isaac Newton
Bram de Swaan
El viajero incomparable. Charles Darwin
Victoria Schussheim
El médico del rey decapitado. William Harvey
Xavier Lozoya
El explorador del tiempo. Charles Lyell
Pedro Moreno
El olvidado monje del huerto. Gregor Mendel
Fabio Salamanca
El hombre de su tiempo. Lewis Henry Morgan
Susana Glantz
El ordenador del mundo. Carl Linné
Javier Valdés, Hilda Flores
El vencedor del mundo invisible. Louis Pasteur
Magdalena Fresán
El ruso de los perros. Iván P. Pavlov
Xavier Lozoya
El inventor del porvenir. James Clerk Maxwell
Bram de Swaan
El químico de las profecías. Dimitri I. Mendeléiev
Horacio García
El investigador del fuego. Antoine L. Lavoisier
Horacio García
El perdedor iluminado. Ignaz P. Semmelweis
Magdalena Fresán

El descubridor del oro de Troya. Heinrich Schliemann
Estanislao C. Stanislawski, Silvia M. Stanislawski
El preguntador del rey. Francisco Hernández
Xavier Lozoya
El detective de la mente. Sigmund Freud
Martha Arregui, Martha Saslavsky
El visionario de la anatomía. Andreas Vesalius
José Antonio Rojas
Atrapados en la doble hélice. James Watson y Francis Crick
Manuel Gallardo
El alquimista errante. Paracelso
Horacio García
El malabarista de los números. Blaise Pascal
Bram de Swaan
El maestro de lo infinitamente pequeño. John Dalton
José Antonio Chamizo
El prisionero de la verdad. Bertrand Russell
Elisa Bonilla
El príncipe del conocimiento. Georges Louis de Buffon
Ariel Rojo
El artífice del método. Francis Bacon
Graco Rojo
La chispa de la vida. Alexander I. Oparin
Antonio Lazcano
El admirable caso del médico curioso. Claude Bernard
Ángel Leyva
El hombre de las moscas. Thomas H. Morgan
Ana Barahona
El naturalista de los cielos. William Herschel
Estrella Burgos
El renovador involuntario. Nicolás Copérnico
Sergio de Regules
El sabio apasionado. Robert Koch
Magdalena Fresán

Esta edición se terminó de imprimir en octubre de 2003.
Publicado por ALFAOMEGA COLOMBIANA S.A.
Calle 106A No. 22-56, Bogotá, Colombia.
E-mail: scliente@alfaomega.com.co
La impresión y encuadernación se realizaron en
Quebecor World Bogotá.



Nadie duda de que la ciencia es importante para el progreso de la humanidad; lo que casi nunca nos dicen es que también es sumamente divertida. La historia de la investigación científica es tan apasionante como una buena novela de misterio o una película de acción.

En este libro damos a conocer la historia y la obra de Carl F. Gauss, astrónomo, físico y matemático alemán, quien dedujo la curva normal de la probabilidad o Curva de Gauss, que todavía se usa en los cálculos estadísticos, inventó un telégrafo eléctrico, un magnetómetro bifiliar, y proyectó y construyó un observatorio no magnético.
Queremos que niños y jóvenes puedan acercarse a la obra fundamental de Carl F. Gauss; para eso seleccionamos sus fragmentos más importantes y los volcamos en un lenguaje claro y comprensible. Ojalá se diviertan todos al leer este libro tanto como nosotros al publicarlo.

ISBN 958-682-503-5
9 789586 825030

COLCIENCIAS

Alfaomega