

• UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LOS CONCEPTOS DE FUNCIÓN, FUNCIÓN LINEAL

INFORME FINAL

Investigador Principal: Gloria García O.

Coinvestigadores: Celly Serrano, Luis E. Espitia

El informe presenta en primera instancia la modificación en la metodología utilizada para la experimentación de las situaciones didácticas en sexto y séptimo grado y en segundo lugar los resultados obtenidos. Los resultados, las publicaciones y la asistencia a los eventos que se describen se suman a los presentados en el Informe de Avance (1.996)

1. Modificación en la metodología de investigación.

Con la asesoría de la doctora Rosa María Farfán y en consideración a los estudios preliminares elaborados por el equipo, estudio de concepciones de estudiante, análisis de estado del concepto de función en el sistema de enseñanza, textos y programas, análisis histórico epistemológico del concepto de función se nos orientó para utilizar la ingeniería didáctica como metodología de investigación para las situaciones didácticas diseñadas en sexto grado. Esta asesoría contó además con la participación en el Seminario Ingeniería Didáctica que la doctora Farfán dictó a estudiantes de la maestría.

Por su parte la metodología empleada para la experimentación de las situaciones didácticas fue elaborada sobre los diseños metodológicos empleados para estudiar el cambio cognitivo logrado por la instrucción.

2. Los objetivos cumplidos se condensan en los siguientes resultados:

- 1 A. La variable institucional en el conocimiento profesional del profesor: el caso de la función
- 2 B. El aprendizaje de la función de proporcionalidad directa, incluye video.
- 3 C. Concepciones de función en estudiantes de la Básica Secundaria
- 5 D. Un tratamiento didáctico para la noción de función como dependencia, incluye video
- 5 E. Hacia la noción de función como dependencia y patrones de la función lineal
- 6 F. El concepto de función en textos escolares

Los cuatro primeros resultados se condensan en formato de artículo para su publicación en revista, los dos últimos en formato de publicaciones como: cuaderno didáctico (E) y libro (F). Con estos formatos los resultados cumplen los objetivos propuestos para socializar los resultados. Los artículos serán enviados a su aprobación a las siguientes revistas: Re. Educación Latinoamericana de Matemática Educativa (A); Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica (B); Revista Ema. Una empresa docente (D).

- 7 Los resultados obtenidos se sitúan en los objetivos generales a y b y específicos 1,2,3 y 4.
- El objetivo general c se cumplió con la docencia por parte de dos miembros del grupo en las asignaturas mencionadas en el Informe de Avance (1.996) y durante el II semestre de

1.996 y I semestre de 1.997 con la docencia de uno de los miembros del grupo en los seminarios:

Investigación I Programa de Maestría en Docencia de la Matemática

Investigación II Programa de Maestría en Docencia de la Matemática

Además cada uno de los miembros del equipo ha dictado un Seminario sobre la temática de la investigación en la Especialización en Educación Matemática. Universidad de Pamplona.

En este mismo objetivo se inscriben los siguientes cursos para maestros:

Seminario Taller: Situaciones didácticas de variación, variable y dependencia en la escuela Básica Secundaria. Departamento de Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. Noviembre 14- 15- 16 .1.996

Taller: Hacia la noción de función como dependencia. Segunda Reunión Anual del Club Ema. una empresa docente. Junio 4/97

2.2 Registramos también como resultados en este último período de la investigación, la asistencia a los siguientes eventos:

Décima Reunión Latinoamericana sobre Formación de profesores de matemáticas e investigación en Matemática Educativa. Ponencia: Un análisis de contenido de la noción de dependencia y variación en textos escolares. Puerto Rico. Agosto, 1.966

Encuentro de docentes e investigadores en Educación Matemática. Ministerio de Educación Nacional. Diciembre 10-14.1.996

Seminario permanente sobre Educación Matemática. Ministerio de Educación Nacional. miembros permanentes.

Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, a celebrarse en el mes de julio, 1.997. México

Ponencia: La variable institucional en el conocimiento profesional del profesor: el caso de la función

Curso: Hacia la noción de función como dependencia y patrones de la función lineal

2.3 Publicaciones

Situaciones de variación numérica: génesis de la función lineal. Rev: Notas de Matemáticas. No 39. Departamento de Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia.

Un análisis de contenido de la noción de dependencia y variación en textos escolares. Memorias Décima Reunión Latinoamericana sobre Formación de profesores de matemáticas e investigación en Matemática Educativa. Puerto Rico. Agosto, 1.966

2.4 Dirección de tesis

Maestría en Docencia de la Matemática. Departamento de Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional

El concepto de función en algunos textos de la Escuela Normal Superior.

Gloria P. León B. - Jeaneth A. Molina G.

Concepciones de función en maestros de la Básica Secundaria: un estudio de caso

Antonio Tibaduiza- Fernando Villarraga

Errores asociados a la estructura multiplicativa. Gilberto Ladino

ARTICULOS

B.

El aprendizaje de la función de proporcionalidad directa

Introducción

En este estudio presentamos un diseño de instrucción que busca mostrar los procesos cognitivos logrados en estudiantes del séptimo grado de la Educación Básica como consecuencia de una secuencia de instrucción diseñada sobre tareas que involucren situaciones y problemas de la función de proporcionalidad directa en escenarios numéricos y gráficos. Los aspectos metodológicos integran los aportes de los estudios realizados Heiberte y Wearne (1988) Llinares y Sánchez (1992) en los que se describe la adquisición de los conocimientos adquiridos por estudiantes como consecuencia de una secuencia de instrucción diseñada explícitamente para promover el cambio cognitivo. El propósito fué analizar las estrategias utilizadas por los estudiantes y cómo estas evolucionan en tareas de resolución de problemas. Para lograr este propósito se caracterizó en primer lugar, la secuencia instruccional para propiciar el cambio con base en estudios preliminares del dominio de contenido y del papel desempeñado por las representaciones en el proceso de aprendizaje. En segundo lugar se identificaron los procesos cognitivos característicos del dominio y en tercer lugar se evaluaron los cambios cognitivos llevados a cabo durante el proceso de instrucción. El diseño instruccional se apoya como base fundamental en el lenguaje como instrumento cognitivo individual y colectivo que ayuda a la propia comprensión.

Descripción del estudio

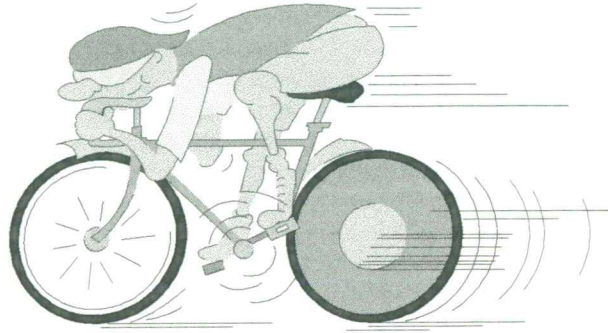
El estudio se realizó con 21 estudiantes del séptimo grado de la Educación Básica con un rango de edades entre los 12 y los 13 años. El diseño instruccional fue desarrollado durante 6 sesiones en un periodo de un mes de clase. Se utilizó una cámara de video que incluyo audio para grabar las interacciones tanto en los grupos, como en los momentos de validación colectiva y establecer como originaban los cambios. En el desarrollo de los procedimientos de resolución individual se incluyó la solicitud de argumentar por escrito los procedimientos. El diseño tuvo en cuenta las siguientes componentes metodológicas:

a. *Identificación del dominio de contenido:* Se realizaron estudios preliminares sobre el concepto de función como dependencia, su evolución histórica, de los aspectos matemáticos del concepto de función lineal y la proporcionalidad como función lineal, para los que se tuvieron en cuenta los realizados al respecto por Freudenthal (1983); Vergnaud (1983,1991); Fiol, Fortuny (1990) y Azcaráte, Delefo (1990); así mismo se analizó en textos escolares y programa curricular vigente (García G., C. Serrano Espitia L., E. 1996, 1997) el estado actual del concepto en el sistema de enseñanza en la educación colombiana. Con base en estos estudios se seleccionó como contexto de variaciones entre variables, las relaciones entre la variación del número de vueltas que da un corredor a velocidad constante (problemas 1 y 2) y el tiempo que gasta. La tareas se presentan en un contexto de variación numérica, y gráfica; en las primeras, los números pertenecen al dominio de los números naturales.

Problema 1

Un entrenador tan sólo registró los siguientes datos durante un entrenamiento de ciclismo de uno de sus pupilos, quien mantuvo el mismo ritmo de carrera.

Nº de Vueltas	Tiempo minutos.
3	12
7	20
35	36



a. Ayúdele a completar la tabla. Explique cómo lo hace.

$$v = 4t$$

Problema 2

Los registros tomados por el entrenador para otro pupilo quien también mantuvo el mismo ritmo de carrera son :

Nº de Vueltas	Tiempo minutos
2	3
4	6
6	9
10	15

a. ¿Cuántos minutos gasta para dar cinco vueltas ?. Explique su respuesta.

b. ¿ En doce minutos cuántas vueltas ha dado ?. Explique su respuesta.

c. Con sólo los datos de la tabla calcule: ¿Cuánto tiempo gastaría en recorrer veinticuatro vueltas ?. Explique su respuesta.

$$v = \frac{2}{3}t$$

Las tareas gráficas, (Problemas 3 y 4) se introducen tanto por su su valor como objeto propio del conocimiento, de la variación, y de modelos de variación como por su significación en la comunicación de la información del mundo actual

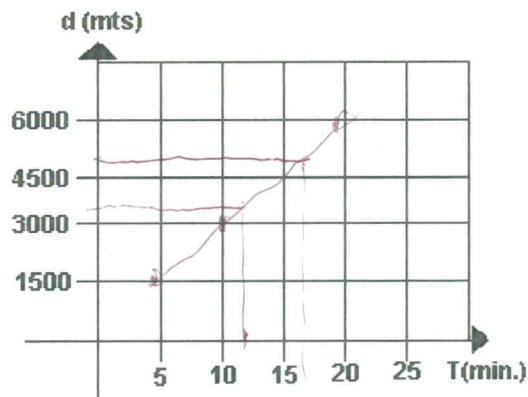
Problema 3

La tabla muestra el tiempo que gasta y la correspondiente distancia recorrida por un atleta que conserva siempre el mismo ritmo de carrera.

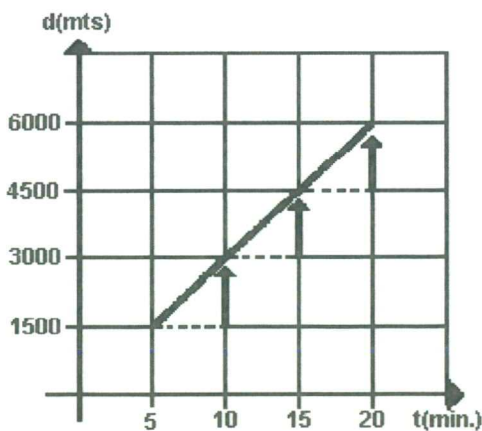
Tiempo minutos	Distancia metros
5	1500
10	3000
15	4500
20	6000



a. En el diagrama cartesiano marque un punto para cada tiempo y su distancia correspondiente según la información dada por la tabla.



Problema 4 En la gráfica :



- ¿Cómo están ubicados los puntos?
- ¿Qué representa la gráfica?
- Utilizando solamente la gráfica calcule, aproximadamente, la distancia recorrida por el atleta a los 12 minutos.
- ¿Cuánto tiempo ha gastado si ha recorrido 5000 mts?
- ¿Cuántos metros recorre en 40 minutos? Explique su respuesta.

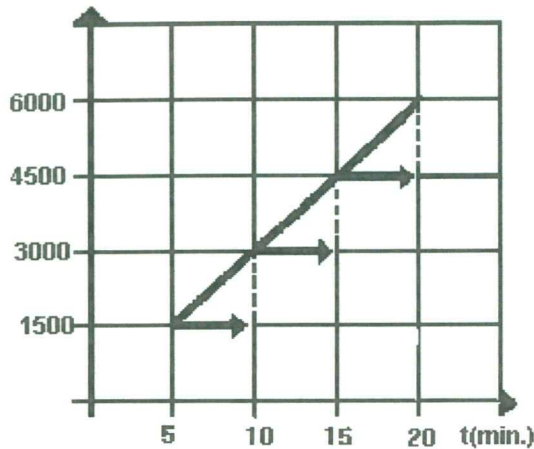
$$d = 300t$$

Al el mismo!

- Cuando el tiempo aumenta de cinco a diez minutos, ¿cuánto aumenta la distancia?
- Cuando el tiempo aumenta de diez a quince minutos, ¿cuánto aumenta la distancia?
- ¿Si el tiempo aumenta de treinta a treinta y cinco minutos, el aumento de la distancia será el mismo que el de a y b? ¿Por qué?

¡no! ¡no!

d. En esta gráfica cuando el tiempo aumenta cantidades iguales, ¿qué le sucede a la distancia?



- Si la distancia aumenta cantidades iguales ¿Qué le sucede al tiempo? ¿Su aumento es constante?
- Calcule el cociente (razón) entre el aumento de la distancia y el aumento del tiempo.
- Calcule la razón entre cada par de valores correspondientes.
- Prolongue la gráfica: ¿qué información adicional se obtiene?
- Teniendo en cuenta tanto la tabla de la pregunta 1 (página 1) como la gráfica de la pregunta 3 (página 2) escriba una expresión que permita calcular la distancia recorrida para cualquier tiempo.

b. Procesos cognitivos: Para la identificación de los procesos cognitivos se retomaron los procedimientos y estrategias aportadas por las investigaciones sobre el razonamiento proporcional y la estructura multiplicativa (Vergnaud 1983, Romberg, Lamon y Zarinnia 1988) en dominios numéricos; para los procedimientos gráficos se retomaron los aportes de Lehinhardt, Zaslavsky y Stein (1990). La hipótesis que subyace en estos planteamientos subraya el papel determinante que desempeñan las tareas – representaciones asociadas – y los tipos de actividad propuestos para el proceso de aprendizaje.

En las tareas se controlaron las siguientes variables: escenarios de movimiento de un deporte del mundo social, entrenamiento de un ciclista, precio costo en situaciones de la vida real, para controlar el establecimiento de relaciones de dependencia; el rango de las variables relacionadas son los números naturales. Se identificaron los siguientes procedimientos para las tareas numéricas:

Modelo numérico de diferencias constantes: a. Colocan los números que faltan en cada una de las variables, manteniendo la constante aditiva que las relaciona, este modelo es más fácil de asociar en la tabla correspondientes al problema 2, puesto que la constante aditiva +2 es evidente en la primera columna y la constante aditiva +3 en la segunda.

b. Asocian «el siguiente a» para relacionar las variables:

$$2 + 1 = 3$$

$$4 + 2 = 6$$

$$6 + 3 = 9$$

Operador funcional: Con base en el dominio de los aspectos factoriales del número se identifica el operador $\xrightarrow{\times k}$, y/o se encuentra por el cociente a/b ; este es evidente en la tabla correspondiente al problema 1, pero no en el problema 2.

La evolución de las estrategias se definió como:

Isomorfismo aditivo: Uso de $f(a+b) = f(a) + f(b)$, como estrategia que evoluciona desde la constante aditiva.

Operadores funcionales, generalización del operador ya sea un número natural o una fracción, aún en situaciones donde tal operador no es evidente.

Los procesos cognitivos de las tareas gráficas involucran dos tipos de actividades la interpretación y la construcción. Leinhard propone la interpretación como la acción por la cual el sujeto da sentido a la gráfica, se caracteriza porque se realiza dentro de los datos dados. La construcción es la acción por la cual se genera un nuevo dato, se crea algo no dado. Una y otra pueden atender a rasgos locales, globales, cualitativos o cuantitativos de la gráfica; la clase de las tareas demandan tipos de actividades como la predicción, la clasificación y la traslación; las tareas pueden también demandar acciones de interpretación y construcción simples o bastantes difíciles. Precisamente porque los estudiantes con quienes se realiza el diseño no han tenido experiencia alguna en la interpretación o construcción de gráficas y también porque diversas investigaciones han señalado como dificultades: la interpretación de la gráfica e identificar patrones de variación, se identificaron las siguientes acciones cognitivas simples.

Estrategias empleadas por los estudiantes:

- Reconocimiento de la gráfica desde sus características geométricas.
- Lectura de la gráfica asociando los nombres de los ejes.
- Colocación de puntos en la gráfica.

que se refiere a la gráfica

La evolución de las estrategias se definió como:

- Interpretación de la gráfica como representación de una dependencia de dos variables.
- Lectura de patrones de comportamiento lineal.
- Interpolación y extrapolación gráfica.
- Predicción del comportamiento de la gráfica a partir del patrón de variación.
- Traslación entre: gráfica $\rightarrow$ tabla, y gráfica – tabla $\rightarrow$ fórmulas tipo renacentista.

evolución

c. *Diseño de Instrucción*: El diseño se realizó integrando actividades individuales, trabajo en pequeños grupos (tres o cuatro estudiantes) con la validación de los procedimientos individuales y colectivos junto con la interacciones realizadas por el profesor. El diseño pretendía proporcionar autonomía en el aprendizaje basada en el principio de que la construcción consensuada amplía el marco conceptual y la comprensión del estudiante. Este tipo de actividad pone de manifiesto procedimientos individuales lo que da lugar a producir el conflicto. En este sentido el diseño se apoya en el papel que desempeña el lenguaje en los procesos de comprensión, de explicación y de reconceptualización en las propias construcciones cognitivas.

Las interacciones desestabilizadoras del profesor se realizan con la introducción de nuevos datos tanto para que el estudiante generalice su estrategia como para generar el posible conflicto con el procedimiento utilizado. Los nuevos datos, como los números impares o nuevas tablas (como en el problema 2), generan este tipo de conflicto pues alteran los procedimientos hasta ahora empleados.

En particular, el diseño integra las investigaciones sobre el concepto de función (Vinner y Dreyfus 1989; Kaput 1991; Dubinsky y Harel 1992; Sfard 1992; Sierpinska 1990) que enfatizan dos aspectos necesarios para una mejor comprensión del concepto: uso y características de la representación utilizada y diversas perspectivas para llegar a la comprensión del concepto de función y sus modelos. El papel desempeñado por las representaciones es de especial significación puesto que las diferentes representaciones asociadas al concepto ponen de relieve distintas características y hasta diferentes visiones del concepto (Janvier 1983, p. 24). Por ejemplo, la noción de función como dependencia entre variables alcanza su mejor expresión a través de representaciones como los enunciados verbales, tablas de valores, gráficas y fórmulas o ecuaciones. Lo que impone la necesidad de proponer tareas que demanden la traslación entre estos sistemas de representación y aún las transformaciones dentro de un mismo sistema. Particularmente las tablas de valores y las gráficas cartesianas ayudan a desarrollar un pensamiento prealgebraico sobre la variación y sobre sus patrones de comportamiento.

El diseño fue secuenciado en las siguientes fases:

1. Situaciones de surgimiento: En ésta, el estudiante se enfrenta individualmente a la resolución de la tarea con sus procedimientos pero debe explicarlo por escrito.
2. Situaciones de validación: se componen de las actividades de interacción colectiva donde se validan los procedimientos individuales; le siguen situaciones de familiarización y rutinización donde se ponen en juego los procedimientos consensuados.
3. Situaciones de reutilización en problemas más complejos: en estas situaciones se busca que el estudiante utilice procedimientos más globales que le permitan identificar y diferenciar patrones de estructuras de comportamientos lineales y no lineales.

Resultados

El análisis de los resultados se realiza siguiendo el orden de las representaciones que caracterizan las situaciones del diseño, numérico, gráfico y sus interrelaciones, en cada uno de ellos se confrontan procedimientos individuales, explicaciones, las interacciones grupales y colectivas con las interacciones del profesor.

A. Situaciones numéricas:

En la situación de surgimiento, los estudiantes resuelven individualmente los problemas 1 y 2, formulan explicaciones por escrito. Las características de los números involucrados en la tabla del problema 1 inducen al uso del operador funcional, basados en las propiedades factoriales del número.

Modelos	F
Numérico de adiciones constantes.	
a. Constante aditiva en cada columna.	
b. Siguiendo a	

Operador funcional:	
a. con base en las propiedades factoriales de los números, relaciona origen e imagen.	47.61%
b. Combina operador funcional con el cociente a/b, para buscar el valor unitario y volver a aplicar el operador funcional.	23.80%
c. Valor unitario.	23.80%

La eficacia de la estrategia del operador funcional $\times 4$ esta vinculada a las características del tipo de números propuestos, el procedimiento explicado por el 47.6% de los estudiantes se resume en la siguiente explicación *si recorre tres vueltas en 12 minutos es porque 3 se $\bullet$ 4 y dio 12, esto hago para los otros;* un 23.8% aplica el operador funcional para la primera fila de la tabla, pero luego elabora procedimientos como *para saber el resultado de los otros y completar la tabla hice las siguientes operaciones $20 \div 4 = 5$, $7 \times 4 = 28$; $36 \div 9 = 4$, $35 \times 4 = 140$;* el restante 23.8% busca el valor unitario y la constante para cada uno de los valores escribiendo procedimientos como *$12 \div 3 = 4$, $20 \div 5 = 4$, $28 \div 7 = 4$, $36 \div 4 = 9$, busco un numero que dividido por 4 de el numero buscado.*

Se observan los diferentes procedimientos para solucionar o acercase a la solución; el 71.41% combina las dos variables, pues relaciona origen e imagen, también se observa en los procedimientos como algunos estudiantes dan sus respuestas incluyendo las dimensiones del operador como en *se da 1 vuelta en 4 minutos se lo aplique a todos; dividi 12 entre 3 y el resultado es 4 esto quiere decir que en cada vuelta se demora 4 minutos de esta forma se hace más fácil completar lo que falta en la tabla.* El 23.8% que combina el operador funcional y el valor unitario, elabora el análisis dimensional, ninguno de los estudiantes que utilizan las propiedades factoriales elabora este tipo de análisis.

La estrategia del operador funcional se vuelve ineficaz para resolver la tabla del problema 2, puesto que no son evidentes las propiedades factoriales de los números involucrados.

Modelo numérico	F
a. Constante aditiva en cada columna	23.81%
b. Siguiendo a	14.28%
Operador funcional: a. con base en las propiedades factoriales de los números, relaciona origen e imagen. b. Halla el cociente a/b, para buscar el valor unitario y aplica el operador funcional.	52.38%
Otros	4.76%

Uno de los procedimientos utilizados es el modelo numérico de adiciones constantes, sintetizado en la siguiente explicación: *los minutos para dar 5 vueltas deben estar entre 6 y 9 porque se le suman siempre tres a los minutos y siempre dos a las vueltas o en explicaciones como: para las veinticuatro vueltas fui aumentando de 2 en 2 y de 3 en 3.* El

modelo «siguiente a» es explicado como: *gasta 7,5 minutos porque entre el 4 y el 6 estaria el 5 como $4 + 2 = 6$ y como $6 + 3 = 9$ a $5 + 2,5 = 7,5$ porque es la mitad de lo que se le suma a 4 y 6.* El 66.66% que halla el cociente para encontrar el valor de la unidad y luego aplicar el operador funcional, son parte de los que utilizaron las propiedades factoriales para resolver el problema 1. Para calcular la extrapolación planteada por la pregunta ¿cuántos minutos gasta para 24 vueltas?, el 24.76% utiliza el isomorfismo multiplicativo tipo $2 \times 10 = 2 \times 15$ y luego aplican $20 + 4 = 30 + 6$, y son los estudiantes que utilizaron la constante aditiva.

Pero cuando se sucede el proceso de validación de procedimientos individuales colectivamente, se producen conflictos ante la idoneidad y la eficacia de los procedimientos utilizados especialmente cuando el profesor introduce valores más grandes para el número de vueltas (150, 171), esta situación orienta la discusión hacia el uso del operador funcional, para buscar la economía y la generalización. Después de esta fase se propone una situación de rutinización y familiarización para resolver grupalmente, donde los valores de los números también comportan la posibilidad de utilizar los modelos numéricos pero la pregunta del problema 3 está orientada hacia el establecimiento de una regla de carácter general.

3. De la tabla, establezca una expresión que permita calcular un valor cualquiera de la segunda columna a partir de su correspondiente valor, en la primera.

Nº de Fotocopias	Costo \$
3	75
6	150
9	225
12	300

El 61.91% ^{no!} escribe en forma retórica expresiones como *si multiplicamos \$25 por el número de fotocopias nos da el valor buscado.* El 9.52 escribe *la expresión es la multiplicación.* El 16.57% escribe expresiones numéricas puntuales tipo 3×5 , 6×5, que muestra la limitada experiencia de los estudiantes en tareas que induzcan desde procesos aritméticos generalizaciones preálgebraicas. Este tipo de respuestas es coherente con la presentación estática que hacen los textos de las tablas, pues es presentada para mostrar puntualmente la correspondencia entre el valor origen y el valor imagen pero sin enfocar su presentación a la iniciación de la variable como valor que puede tener un número infinito de valores.

En la validación colectiva la profesora teniendo en cuenta esta situación añade una fila a la tabla n ? con el fin de inducir fórmulas de tipo retórico afirmando *¿y para n número de fotocopias cuál será el costo?* un 23,80% del número de estudiantes que no formulan por escrito, lo logran oralmente.

En términos de considerar el reconocimiento a la estructura de contenido característica de los problemas puede afirmarse que hay un avance cualitativo pues en la validación

colectiva un 74% logra enunciar oralmente las expresiones. Es el paso de lo oral hacia lo escrito el que presenta dificultades, lo que nos lleva a concluir que si es posible lograr que los estudiantes hablen de las matemáticas, pues a través de este tipo de interacción hablante oyente construyen conocimiento (NCTM 1991) pero la representación escrita exige más tiempo para su adquisición, y esta variable en la experiencia estaba restringida por su carácter de experimentación.

Finalmente cuando se propone un problema más complejo, como es comparar dos tipos de comportamiento lineal entre tablas (Problema 4) y deducir través de las expresiones el patrón que las caracteriza como en:

4. Dos empresas de telefonía celular "Celullama" y "Celurápida" ofrecen al cliente el precio de las llamadas (hasta tres minutos) según las siguientes tablas:

"Celullama"	
Nº de llamadas	Precio \$
0	6000
5	9000
10	12000
15	15000
25	21000

Tabla 1

"Celurápida"	
Nº de llamadas	Precio \$
1	800
5	4000
10	8000
15	12000
25	20000

Tabla 2

- Establezca una expresión que permita calcular en cada una de las tablas, el precio en pesos para cualquier número de llamadas.
- Si el número de llamadas que hace un usuario al mes es de 150, ¿cuál de las dos empresas le traería más beneficio?

La situación no se altera significativamente en términos de la oralidad pues aproximadamente el 74% logra enunciar expresiones tipo: *en celurápida las llamadas valen \$800 por el número de llamadas, en celullama valen \$600 por el número de llamadas más \$3.000*, como consecuencia del uso del operador funcional en la tabla 2, y ensayar la misma expresión para la tabla 1. La constante aditiva 3.000 plantea una nueva situación y los estudiantes ensayan también para encontrar el valor unitario del precio de una llamada. Un avance cualitativo se logra (71.32%) al establecer oralmente la expresión retórica correspondiente a la tabla de celurápida. El 42.85% escribe la expresión retórica correspondiente a la tabla de celullama.

En general podemos afirmar que la realciones entre las variables no presentó dificultad alguna, debido a que los escenarios de los problemas estaban relacionados con sus vivencias, la identificación de lo que cambia (Sierpinska 1992) también fue asumida por los estudiantes, así como el significado y el procedimiento del operador funcional.

B. Situaciones gráficas.

Teniendo en cuenta las dificultades que presenta el lenguaje gráfico para los estudiantes y atendiendo a que en este nivel aún no han aprendido formalmente su sintaxis, la situación diseñada se inicia con la colocación de puntos, sin embargo no sucedió así pues la mayoría (85.71%) lo realiza sin dificultad alguna.

	F
Interpretación de la Gráfica.	
1. Geometría, asociada a la forma de recta	9.52%
2. Dibujo de las situaciones	4.76%
3. Asociadas al nombre de los ejes	66.66%
4. Como representación de dependencia de dos variables.	9.52%
Colocación de puntos en el sistema cartesiano	85.71%
Otros	
N.C.	9.52%

De igual manera las dificultades enunciadas para la comprensión de la gráfica como expresión de relaciones entre variables, incluyendo los casos de lectura asociados a los nombres de los ejes en la gráfica, lograda por la mayoría de los estudiantes (66.66%) es bastante significativa, pues ayudó a determinar conocimientos adquiridos quizá no específicamente en clase de matemáticas – su enseñanza no corresponde al nivel educativo – sino a través de la lectura de noticias deportivas en diarios y otros medios de comunicación en los cuales se hace uso constante de este tipo de representación y desde los que se crean reglas propias de interpretación, elaboramos esta conclusión con base en las observaciones de los procedimientos, pues pertenecen al tipo ensayo-error. Para el resto de los estudiantes la gráfica es asociada a su forma geométrica *línea ascendente*, *línea diagonal* o al dibujo del movimiento *representa lo que esta ascendiendo; que el atleta va corriendo; un ascenso*.

Sin embargo, las tareas específicas de este tipo de representación, comienzan a presentar las dificultades identificadas para este tipo de representación, las respuestas correspondientes a *otros*, así como los que no constestan (nc) aumentan. Atendiendo a esta situación, el profesor prefirió la interacción individual para orientar cada proceso, y por consiguiente los espacios de validación colectiva se aplazaron. Estas dificultades comienzan a explicitarse en las tareas propuestas en el problema 5, cuando se solicita interporlar y extrapolar gráficamente

	Interpolar	Extrapolar	Otros
Gráfica	23.80%	23.80%	28.57%
Númericamente	47.61%	47.61%	

aquí la experiencia del trabajo numérico que enfatiza la enseñanza de las matemáticas se evidencia, la mayoría de los estudiantes regresan a él a través de la tabla, calculan el valor unidad y luego aplican el operador funcional para ubicar la respuesta en la gráfica; pero también se podría argumentar que es quizá porque no se ha aprendido formalmente este

tema, sin embargo el 23.80% que lo logra nos lleva también a reconsiderar esta afirmación en términos de la comprensión del enunciado de la pregunta *gráficamente*, y de las interacciones individuales que orientó el profesor con este objetivo.

Los procedimientos para resolver la pregunta 2, cuyo propósito es introducir al alumno en el reconocimiento del patrón de variación en la gráfica es un avance cualitativo

	Gráfico	Númérico	V.u
Comportamiento lineal	66.66%	9.52%	14.28%

pues el 66.66% lo logra, algunos de ellos son los alumnos que utilizaron procedimientos numéricos en la respuesta anterior. Vale la pena resaltar el porcentaje de alumnos con respuestas clasificadas como V.u, (14.28%) pues corresponden a respuestas tipo: *aumento 1.500*, donde se muestra la lectura de la variación de una variable. Esta categoría fue elaborada a partir de los procedimientos utilizados por los estudiantes y sustituyó a la tradicional otros.

Las respuestas correspondientes a la predicción de la gráfica, formulada a través de la pregunta d – problema 5 –

	Variación	Geométrica	V. u	NC
Predicción del comportamiento de la gráfica	23.80%	19.04%	14.28%	23.80%

muestra que la predicción gráfica es una actividad cognitiva compleja y exige espacios de aprendizaje prolongados, como lo muestra el número de estudiantes que no contesta (23.80%). Es significativo el número de estudiantes (19.04%) que interpretan la prolongación desde sus características puramente geométricas, recta, *pasa por un punto llamado 0-0*, lo que revela que la sintaxis del sistema cartesiano no es condicionante que dificulte la tarea. Los estudiantes que a partir de su prolongación afirman *si el tiempo aumenta la distancia también; si el tiempo va aumentando cantidades iguales con la distancia ocurre lo mismo. Porque las 2 están relacionadas y si con una ocurre un cambio con la otra también* lo logran por la significatividad de los ejes al estar asociados a situaciones concretas. Los estudiantes clasificados en V.u corresponden de nuevo, son los que identifican la variación cuantitativa o cualitativa de una de las variables *los minutos aumentan siempre de 5 en 5* y corresponden al mismo número de estudiantes de la misma categoría de la pregunta 4. Las dificultades comenzaron a surgir a partir de consignar por escrito la lectura y la interpretación de la gráficas, al igual que en las situaciones numéricas.

Las actividades de traslación (T) se propusieron en dos niveles, simples como la referida a traslación gráfica - la tabla y compleja, cuando se solicita establecer la relación del patrón de variación entre tabla y gráfica formular la expresión que la representa. La primera es lograda por el 76.19%, mientras que sólo el 38.09% logra establecer la expresión. Aumenta significativamente el número de respuestas clasificadas con otros (28.57%) y los que no contestan (23.80%).

Conclusiones

Los investigadores (Hiebert y Wearne, 1988; Fennema, Carpenter y Lammon 1988; Resnick 1987; Llinares y Sánchez 1992) sobre los cambios cognitivos logrados durante la instrucción coinciden en afirmar que solo el estudio de los procesos cognitivos específicos ligados a tópicos concretos del currículo escolar pueden demostrar los aspectos dinámicos por los que transcurren los cambios siempre y cuando se expliciten las características del diseño de instrucción. Para ser coherentes con estos aportes, debemos señalar que el diseño propuesto, si bien aparentemente podría considerarse un diseño enmarcado en los ya reconocidos presupuestos del constructivismo, trabajo individual, grupal y colectivo, su práctica lo ha vuelto difuso, pues el trabajo individual implica presentarle al estudiante situaciones problema que actúen como motivaciones, es decir que el problema sea asumido en su plena significación por el estudiante. En este sentido las situaciones semánticas de los conceptos propuestos en el diseño logran este propósito. Pero el trabajo en grupo, no es asumido en el sentido de la colectividad que intercambia interacciones para resolver la situación, la experiencia nos demostró lo viciado que se encuentra esta estrategia en las aulas de clase, su conformación se realiza por amistad, o alrededor del estudiante que a consideración del grupo sabe ya resolverlo. De aquí que durante el desarrollo del diseño hubo que hacer un trabajo dinamizador permanente para que el grupo interactuara sobre los tópicos de la tarea.

Por otra parte, desde el punto de vista de la elaboración del diseño de las tareas y de las preguntas planteadas para generar conflictos cognitivos, debemos afirmar que se replantean de manera radical las tradicionales modalidades de enseñanza, tales como formular preguntas para inducir respuestas que a consideración del profesor son las verdaderas, o inducir tempranamente definiciones. La perspectiva de pasar de la información y/o instrucción a la comunicación implica un cambio sobre las mismas concepciones de los matemáticos, junto con un dominio profundo de los contenidos matemáticos y de sus conexiones con otras ciencias.

Desde el punto de vista de las estrategias planteadas por los estudiantes para resolver inicialmente las tareas numéricas y gráficas, se puede concluir que si bien estas son de carácter local adquiridas formal o informalmente, rupturan la concepción de un único procedimiento para resolver un problema. Así mismo se puede afirmar que el tipo de tareas escritas u orales propuestas, operan un cambio en los procesos cognitivos de los estudiantes, generando procedimientos más globales y estructurales. Esta afirmación la hacemos dentro de las restricciones propias de la experimentación, tiempo y situación, pues el diseño de cierta manera fue ajeno a los contenidos que venían desarrollándose en la clase de matemáticas, aunque si está prescrito para este grado.

Las estrategias clasificadas dentro de los criterios otras y no contesta, frecuentes en las tareas de situaciones gráficas, no pueden ser clasificadas como fracasos, puesto que si se tiene en cuenta las dificultades señaladas en este dominio y además que en la escuela el tema no es relevante, ellas son muestra de procesos cognitivos simples que se pueden potenciar a partir de diseños análogos al propuesto.

Finalmente consideramos relevante este estudio porque nos muestra a los educadores en matemáticas que pasar de una concepción de evaluación como rendimiento a una concepción sobre valoración de procesos y competencias cognitivas, implica profundos y quizá hasta radicales cambios, que van desde el diseño de instrumentos para la recolección de procedimientos hasta cambios sobre las concepciones de las matemáticas. Consideramos también que este tipo de estudio queda abierto, pues se necesita conocer y realizar más, implicando diferentes contextos y diferentes dominios, para analizar el aprendizaje desde un punto de vista dinámico y como producto de diseños de instrucción.

BIBLIOGRAFIA

CARPENTER, T, y PETERSON, P., 1988. Learning through Instruction: The Study of Students' Thinking during Instruction in Mathematics, *Educational Psychologist*, 23 (2), pp, 75 89.

FENNEMA, E., CARPENTER, T.P, y LAMON, S., 1988. Integrating Research on Teaching and Learning Mathematica. (NCRMSE: Madison).

GARCIA, G., SERRANO, C., ESPITIA, L., 1996. Hacia la Noción de Función como Dependencia. Colciencias. Universidad Pedagógica Nacional.

GARCIA, G., SERRANO, C., ESPITIA, L., 1995. Elementos para la Construcción de una Didáctica de la Función. Cuadernos de Investigacion. Universidad Pedagógica Nacional.

HART, K.,1981. Ratio and Proportion en K. Hart (ed.), *Childrens' Understanding of Mathematics*, 11 - 16. (Murray: London).

KARPLUS, R., PULOS, S., y STAGE, E. K., 1983. Proportional Reasoning of Early Adolescent, en R. Lesh y M. Landua (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. (Academic Press: London).

LEINHARDT, G., 1988. Getting to Know: Tracing Students' Mathematical Knowledge from Intuition to Competence, *Educational Psychologist*, 23 (2).

LLINARES, C, S., y SANCHEZ, G, V., 1992. El Aprendizaje desde la Instrucción: la Evolución de las Estrategias Personales en Tareas de Proporcionalidad Numérica. *Enseñanza de las Ciencias* 10 (11) pp. 37 - 48.

VERGNAUD, G.,1983 Multiplicative Structures, en R. Lesh y M. Landau (eds.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. (Academic Press: London).



CONCEPCIONES DE FUNCION DE LOS ALUMNOS DE LA BASICA SECUNDARIA.

INTRODUCCIÓN:

El conocimiento de las concepciones que tiene los estudiantes de los conceptos matemáticos, como resultado de la experiencia social, cultural y escolar ha llevado a que muchos de los investigadores en Educación Matemática (Vinner 1983, Janvier 1986, Deulofeu 1995, Ruiz-Higueras 1994, y otros), las estudien como parte esencial para conocer cómo se da el aprendizaje de esos conceptos.

Dentro del proyecto, "Una propuesta didáctica para la construcción de los conceptos de función y función lineal se consideran dos tipos de concepciones en los estudiantes :

- ♦ Concepciones no inducidas intencionalmente por la enseñanza que se consideran construidas por los estudiantes como resultado de su interacción con el medio familiar social y escolar, y que no incluyen un trabajo escolar directamente con el concepto. Tal es el caso de la concepción de función que tienen los estudiantes de sexto grado de la básica secundaria.
- ♦ Concepciones inducidas intencionalmente por la enseñanza que se consideran el resultado de un tratamiento escolar durante el cual se ha realizado un trabajo con el concepto sus representaciones y sus aplicaciones. Se considera que tal es el caso de los estudiantes de grado octavo de la básica secundaria que al terminar este curso ya han estudiado el concepto de función.

METODOLOGIA.

Las pruebas elaboradas para establecer las concepciones de función tanto en estudiantes de sexto grado como estudiantes de octavo, se implementaron teniendo en cuenta por una parte, la temática que plantea el curriculum de la básica primaria y que incluye el trabajo con transformaciones y operadores, sus representaciones y aplicaciones ; y por otra parte los contenidos propuestos por el curriculum oficial para los grados séptimo y octavo (función como relación especial, función lineal, otros modelos de función).

La pruebas fueron implementadas paralelamente con el fin de identificar las concepciones de transformación (alumnos de sexto grado) y de función (alumnos de octavo grado) ; además establecer las representaciones gráficas verbales y simbólicas que el estudiante asocia a cada una de estas nociones y por medio de los ejemplos citados y de la forma de solucionar los problemas propuestos inferir las invariantes asociadas al concepto y las situaciones problema que el alumno considera que le dan sentido o significado al concepto. En cada una de las preguntas se pide al alumno justificar ya sea su definición, sus ejemplos y sus procedimientos, para utilizar su argumentación y explicación como argumento para establecer las diferentes categorías.

La aplicación de las pruebas se realizó sobre 28 estudiantes de sexto y 24 de octavo grado, de colegios oficiales y privados en la ciudad de Bogotá. La

confiabilidad de las mismas se fundamenta en el análisis histórico-epistemológico del concepto de función, en el estudio de los textos y en el juicio de expertos a los cuales fue sometida. La validez esta basada en la base lógica del concepto y en la base empírica de las múltiples investigaciones y experiencias realizadas en este campo por investigadores en educación matemática.

Se anexan las pruebas correspondientes a cada uno de los dos grados.

A continuación se presentan las implicaciones generales de cada una de la preguntas realizadas en las pruebas.

Preguntas sexto grado.	Preguntas octavo grado.
Pregunta 1. Se indaga por una explicación personal de lo que es una transformación.	Pregunta 1. Se indaga por una explicación personal de lo que es una función.
Pregunta 2. Se pide identificar y caracterizar transformaciones en situaciones de la vida real. Nota : Se estudia la coherencia entre la definición personal y el ejemplo dado.	Pregunta 2. Se pide identificar y caracterizar funciones en situaciones de la vida real. Nota : Se estudia la coherencia entre la definición personal y el ejemplo dado.
Pregunta 3. Se indaga por las representaciones (verbales, gráficas o numéricas) que el estudiante asocia a una transformación.	Pregunta 3. Se indaga si representaciones gráficas dadas corresponden o no a funciones. Se pide justificar el porque de la decisión
Pregunta 4. Se proponen enunciados verbales y numéricos con el fin de que el estudiante los clasifique como transformaciones o no, justificando su clasificación.	Pregunta 4. Se proponen expresiones algebraicas con el fin de que el estudiante decida si corresponden o no a representaciones de funciones, justificando su decisión.
Pregunta 5. Se plantea una situación problema en la cual se espera que el estudiante use la transformación para modelarla matemáticamente, combinándola con alguna estrategia de resolución de problemas.	Pregunta 5. Propone una situación problema no convencional en la cual esta incluida la variación y la dependencia con el fin de que el estudiante en su solución utilice la función como herramienta modeladora
Pregunta 6. Se introduce un problema en donde se da una secuencia de acciones de variación que deben ser modeladas por medio de una función	Pregunta 6. Se presenta una gráfica cartesiana correspondiente a una situación de movimiento y se pide interpretarla y asociar a ella una regla funcional.

RESULTADOS

Los resultados obtenidos al interpretar y analizar las respuestas dadas por los estudiantes a las preguntas propuestas se resumen a continuación.

Pregunta 1 :

El 62 %de los alumnos de sexto grado asumen la transformación como cambio, asociado a la relación causa- efecto, pero sin identificar qué cambia ni cómo cambia.

Algunas de las respuestas dadas fueron : *Es el cambio de las propiedades de una cosa, persona o número. Es convertir algo en otro algo.*

El 25% de los estudiantes de octavo grado explicaron la noción de función como una relación especial con la condición de unicidad, le siguió en frecuencia (22%) el grupo de estudiantes que la consideran como una correspondencia, considerada como la asignación entre los elementos de dos conjuntos que identifica como Dominio y Codominio, aunque no necesariamente establece la unicidad de la correspondencia. También se presentan respuestas extrañas que se categorizaron como Otras : *Una función se refiere al papel o lugar que desempeña una persona o cosa en algún puesto en la vida. Es la acción determinada para cada cosa.*

no se
comprende
la pregunta

Pregunta 2 :

Los ejemplos de transformación de los alumnos de sexto grado se clasificaron según el cuadro, el escenario y se encontró que los más comunes (34%) fueron el escenario cotidiano y el científico (Ciencias Naturales), y el cuadro numérico se presenta con una frecuencia de sólo 3%, y nunca recurren a ejemplos en el cuadro geométrico. Las expresiones usadas son verbales y en un caso muy particular aparece una tabla.

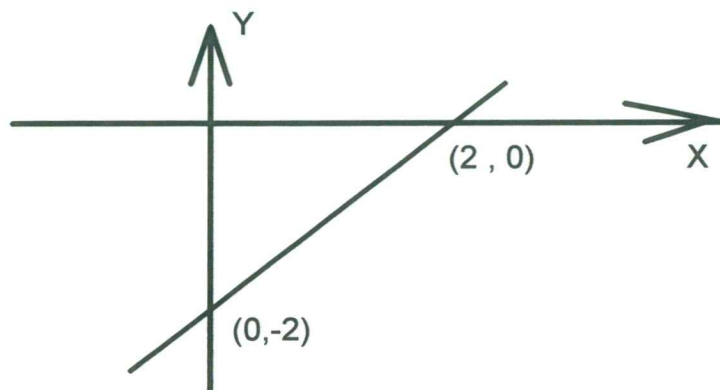
Ejemplos representativos son : *El cambio de líquido a gaseoso, Cuando una persona no lee y luego no suelta el libro. En Matemáticas puede ser la suma.*

Los ejemplos de los estudiantes de octavo grado fueron en su gran mayoría (74%) del cuadro algebraico y el 32% de estos correspondieron a expresiones de funciones afines como $y = 2x + 3$, y en orden de frecuencia la lineal y la cuadrática. En general, en los ejemplos no se propone dominio y si se propone es de tipo numérico. La coherencia entre la definición personal y el ejemplo, entre las invariantes de función y los ejemplos se da en un 32%. Algunos ejemplos típicos son : *La novia que tiene cada amigo mío, y, $X^2 + y^2 = 1$.*

Un caso en el cual se muestra la coherencia : *La función es una regla de correspondencia en la cual un elemento de un grupo tiene que ver con sólo uno de otro grupo que corresponde al ejemplo : el número de la lista de cada estudiante del salón.* Y un caso de incoherencia : *La función es la forma de relacionar situaciones de la vida en forma matemática, el ejemplo correspondiente*

propuesto es $Y = 3X + 1$; la función son parejas ordenadas con una determinada condición y el ejemplo : $Y = X - 2$

X	- 2	-1	0	1	2
Y	- 4-	- 3	- 2	- 1	0



Es notable observar que en este caso el contrato didáctico obliga a dar le definición de terna y ese mismo contrato obliga a presentar todas las representaciones que se usan en el aula.

PREGUNTA 3 :

Los argumentos presentados por los niños de sexto para seleccionar como transformación algunos de los gráficos dados presentan al cambio como la forma más frecuente(59%) de justificarlo, seguido de la acción u operación que se realiza sobre un elemento para transformarlo(35%).

Los alumnos de octavo grado en gran porcentaje (70%) clasificaron acertadamente las gráficas funcionales, la explicación mas frecuente (40%) dada como justificación fue la de unicidad asociada al mecanismo geométrico de la recta vertical, Se presenta el caso de un estudiante que asegura *la gráfica no corresponde a una función porque no debe existir una expresión algebraica para ella*. Se presenta en tres casos el argumento de unicidad en sentido inverso mostrando uno de los obstáculos encontrados por Sierpinska para la construcción del concepto, cual es el no reconocimiento de la asimetría de los conjuntos X,Y presentes en la definición.

PREGUNTA 4 :

Los alumnos de sexto grado, coherentemente con la forma en que han trabajado en la Primaria las operaciones entre números naturales, identifican una expresión en donde hay multiplicación como una transformación *porque cada vez que yo multiplico es transformación*, en el caso de la fórmula $A = b \cdot h$, se dice : *sí es transformación porque produce resultados*. En cuanto al argumento dado para

justificar la selección como transformación una vez más es mayoritario el que aduce el cambio que se produce(60%) y la acción que se realiza para producirlo (28%) y como un hecho importante se presentan en los numerales b) y d) ocho explicaciones que corresponden netamente a una concepción de dependencia como son :*Si, porque el precio cambia con los días. Si, porque si alquilo un día son \$1600, si alquilo dos son \$3200 y así sucesivamente. Si, porque aumentan los días y con ellos el valor.*

Los alumnos de octavo grado en la tarea de clasificar expresiones algebraicas como funcionales, acertaron en un 67% y argumentaron que la unicidad (23%) *porque x tiene una sola imagen* y por el tipo de gráfica resultante(28%), *n es una recta por el origen, su gráfica es una parábola*, garantizan la funcionalidad de una expresión algebraica. El 10% de las respuestas se pueden identificar como expresiones de dependencia, como : *Cambios en la variable independiente producen cambios en la variable dependiente*. Pero un gran número de estudiantes al descalificar como funcionales algunas expresiones afirman que son ecuaciones y ellos mismos sólo reconocen como funcionales aquellas en las cuales aparece $f(x)$, mostrando coherencia con la enseñanza escolar.

PREGUNTA 5 :

Las respuestas a los numerales que exigían hacer multiplicaciones fueron casi todas correctas, se anota que se presentó el caso de dos estudiantes que suman repetidamente para multiplicar. En la pregunta que inducía una generalización a N casos el 25% no respondieron, se encontraron 30% de respuestas correctas que es un alto porcentaje, la explicación de la respuestas correctas en un 20% correspondió a una concepción de dependencia como por ejemplo : *Tiene una cantidad de dinero dependiendo de los pasajeros que se suban, Depende de cuantos pasajeros se suban*. Al identificar la situación como generadora de una transformación las respuestas (75%) las justificaciones a esta afirmación son por una operación (23%), por cambio y variación (59%) y por dependencia (20%). Las explicaciones son del tipo : *Porque al subirse mas pasajeros la plata se la transforma mas, porque multiplica el pasaje por los pasajeros, porque cambia la cantidad de dinero con los pasajeros*. Al preguntar cómo debe organizar el conductor los datos para saber cuánto recibe por diferente número de pasajeros el 33% recomienda elaborar una tabla y el 42% sólo recomienda que multiplique el pasaje por el número de pasajeros.

En la pregunta 5 a los alumnos de octavo grado se les pide representar gráfica y simbólicamente una situación, y luego decidir si ella define una función. Las representaciones dadas por los alumnos se categorizaron en, icónicas (36%) cuando solo dibujaban la secuencia de rectángulos obtenida, cartesianas (36%) cuando relacionaban área con alguno de los lados ; se presentaron también tablas y el 33% no respondió la pregunta. El 75% de los alumnos no logran

expresar algebraicamente la relación entre la variación de los lados y la variación del área. El 83% de los alumnos identifica la relación como funcional. De ellos el 50% considera que es una correspondencia y el 15% la identifica como dependencia, con expresiones como : *el área del rectángulo disminuye a medida que aumenta el lado. El área varía con el lado.*

PREGUNTA 6 :

En general los estudiantes de sexto grado no fueron capaces de continuar la secuencia asociada a la variación geométrica y por ello no relacionaron la variación de las veces que se repite la acción con la transformación que se da en el área del rectángulo , Algunos estudiantes dieron respuestas incoherentes con el proceso presentado en la situación problema como : *el área del nuevo rectángulo es N, la mitad.*

La primera parte de la secuencia fue contestada por la mitad de los estudiantes pero luego no pudieron continuar cuando se les pidió repetir el proceso siete veces y menos al repetirlo n veces.

Los estudiantes de octavo grado en un 66% identificaron la gráfica dada como función. De ellos el 33% lo justificó como correspondencia unívoca y el mismo número como dependencia. El 30% no respondió el problema. La unicidad la utilizan tanto los alumnos que responden que si es funcional como los que no, mostrando una vez mas que no se reconoce la asimetría de los conjuntos en la definición de función. La explicación referente al movimiento del automóvil de acuerdo con la gráfica, fue dada describiendo, en unos casos (38%) la velocidad en cada etapa, en otros casos se confundió la gráfica con el recorrido del automóvil (25%) como cuando se dice *entre la una y las tres el carro se movió hacia el oriente.*

CONCLUSIONES GENERALES :

Sexto grado.

- ♦ Los alumnos utilizan el término cambio para explicar lo que es una transformación, no recurren a expresiones como acción, máquina, correspondencia o dependencia.
- ♦ En los ejemplos, el escenario es la naturaleza o lo cotidiano. Si aparecen ejemplos matemáticos son puramente numéricos y coherentes con el tratamiento didáctico que sufre la transformación en la básica primaria.
- ♦ Las representaciones asociadas a la transformación son la verbal, solo en un caso la tabla, y no se explícita ninguna representación gráfica.
- ♦ Aunque los alumnos de sexto grado plantean la transformación como cambio, éste no está asociado propiamente a la variación y a la dependencia para varios valores sino para uno sólo.

Octavo grado.

- ♦ Los alumnos de octavo grado identifican la función con la correspondencia o con una relación especial. No se reconoce la asimetría de los conjuntos X y Y en la definición de función.
- ♦ Los escenarios de los ejemplos son matemáticos y el cuadro algebraico en su gran mayoría. El ejemplo mas nombrado son las funciones afín y la lineal como también la cuadrática, coherente con el tratamiento que se da a la función en este grado.
- ♦ Las representaciones asociadas a la función son, la fórmula, la gráfica cartesiana y con menor frecuencia la tabla.
- ♦ La función no es asumida por el estudiante como modeladora de situaciones de la vida cotidiana y científica porque éstas se consideran separadas de la matemática.

BIBLIOGRAFIA :

DUBINSKY, E. HAREL, G. (1992) The nature of the Process Conception of Function. The concept of Function, Aspects of Epistemology and Pedagogy, Dubinsky and Harel Editors
RUIZ. H, L. (1994) Concepciones de función de estudiantes de Secundaria. Aspectos Epistemológicos y Didácticos. Tesis Doctoral Universidad de Granada,
SIERPINSKA, A. (1992) On understanding the notion of function. The concept of function, Aspects of Epistemology and Pedagogy. Dubinsky and Harel Editors,

*Muchas anexas?
No hay compar. ni validación*

*Procesamiento insuficiente.
No hay análisis.*

D

UN TRATAMIENTO DIDACTICO PARA LA NOCION DE FUNCION COMO DEPENDENCIA

1. Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de las funciones y gráficos se fundamentan y derivan de la estructura y las características propias de su dominio. Los investigadores en Educación Matemática han estudiado tanto los procesos mentales como los niveles de aprendizaje de los estudiantes cuando se aproximan a este dominio. (Vinner y Dreyfus 1983, Markovits 1986, Janvier 1986, Sierpinska 1989, 1992, Sfard 1989, Deulofeu 1995).

Con estos aportes y con el estudio histórico de la evolución del concepto hemos redescubierto elementos como las relaciones entre variables que permiten establecer relaciones cualitativas entre ellas y que están presentes en el medio cultural y social en donde vive el estudiante, permitiendo un mejor acercamiento a el.

Dentro del proyecto Una Propuesta Didáctica para la construcción de los Conceptos de Función y Función Lineal, se seleccionó para aproximarse a la noción de función en sexto grado de la básica secundaria, la función como dependencia con sus componentes de variación y dependencia y con la gráfica y la tabla como representaciones. *wal?*

La aplicación del proceso se realizó con los alumnos de un grupo de sexto grado del Instituto Pedagógico Nacional en Bogotá.

2. Variables Conceptuales

Teniendo en cuenta los aportes didácticos de Sierpinska sobre la comprensión del concepto de función, se han considerado como aspectos relevantes la motivación y los conceptos introductorios, incluyendo la variación y las relaciones entre variaciones; las representaciones de tipo verbal y cartesiana cualitativa; y como invariante la identificación de lo que cambia y cómo se da ese cambio.

El tratamiento diseñado incorpora más lo cualitativo que lo cuantitativo y el contexto gráfico es la gráfica cartesiana sin incluir el estudio de su sintaxis. La tabla por su parte se estudia como representación que permite comparar valores y establecer su aumento o disminución. Con esta aproximación se pretende que los estudiantes conviertan las ideas construidas en motores de desarrollo para alcanzar niveles de comprensión mas integrales y profundos que les permitan llegar a una concepción estructural de función.

El estudio histórico del concepto ha permitido identificar invariantes, representaciones y situaciones problema que le dan significado dentro de las diferentes concepciones de la función a lo largo de su desarrollo. En su génesis la noción de función se dio asociada a la dependencia de cantidades, a la variación y a una regla de correspondencia. Las definiciones de Euler (1755) "*Unas cantidades dependiendo de otras de manera que si las otras cambian estas cantidades también cambiarán*" y de Cauchy (1821) "*Cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que, dando el valor de una de ellas se puede deducir el valor de las otras, concebimos de ordinario estas*

diversas cantidades expresadas por medio de una que toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son las que llamamos funciones de esta variable" (Citados por Youschkevitch 1976), identifican la variación de cantidades y la dependencia como el punto central de la definición de función ; por otra parte la definición de Cauchy establece la necesidad de una regla de correspondencia válida en todo el rango de variación de la variable independiente. De esta manera las dos definiciones reconocen que la dependencia funcional implica la noción de variación en tanto que la única manera para establecer que una cosa depende de otra es hacer variar la otra y constatar el efecto de la variación.

Dentro de la propuesta se ha considerado importante partir del hecho de que en la Básica Primaria las operaciones aritméticas son presentadas bajo el modelo funcional en el cual se considera el primer término como un estado inicial y al segundo como un transformador que actúa sobre el primero, es decir se asume una concepción de transformación para la función. Por otra parte las tablas se utilizan para representar operaciones aritméticas en su sentido estático (correspondencia uno a uno), o para explicitar operadores. Las nociones de cantidades variables, de situaciones de cambio y en general de variación, no se contemplan dentro de la enseñanza en la escuela primaria.

3. Proceso Metodológico

El proceso metodológico a seguir se fundamenta en la ingeniería didáctica como una metodología de investigación. El estudio preliminar incluye la elaboración de la historia y desarrollo epistemológico del concepto, la determinación de las concepciones que sobre el concepto de función poseen los estudiantes de sexto grado de la Básica Secundaria y una exploración sobre las concepciones que sobre función plantean textos y programas de la básica primaria.

La aplicación de la experiencia se realiza en un grupo del Instituto Pedagógico Nacional con treinta y cinco estudiantes ; De acuerdo con las condiciones de la institución y de los alumnos la ingeniería que se aplica queda sometida a las siguientes restricciones:

- De contenido, en cuanto a que el sistema de representación cartesiano como posible expresión de la variación y la dependencia no es motivo de estudio en los grados anteriores ; la variación aun en procesos aritméticos presentes en las tablas tampoco es tema de estudio ; el limitado conocimiento numérico de parte de los estudiantes solo permite trabajar con números naturales.
- De temporalidad, por cuanto la construcción de concepto de función como dependencia requiere de condiciones de tiempo mas extensas.

Teniendo en cuenta las restricciones anteriores se genera la siguiente hipótesis para el diseño del tratamiento :

"La introducción del estudio de las nociones de variación y variable como elementos básicos de la noción de función como dependencia, así como la utilización adecuada de herramientas de representación como la gráfica y la tabla especialmente, podrán contribuir a un acercamiento mas significativo al aprendizaje de la noción de función en la Básica Secundaria".

Grados?

4. El Tratamiento

El tratamiento se plantea según la siguiente secuencia didáctica :

- Gráficas cualitativas donde se relacionan magnitudes variables concretas.
- Situaciones problema de variación y dependencia, representadas en gráficas y tablas que enfatizan la descripción y la predicción de la variación.
- Comparación entre la variación de magnitudes que cambian, identificando los mundos que cambian y cómo se da el cambio.

Las situaciones didácticas asociadas a la secuencia se caracterizan por que en ellas aparecen problemas que el estudiante no podrá resolver completamente con los conocimientos que tiene, o porque los conocimientos son herramientas en otros contextos y debe adaptarlas a los nuevos. En las situaciones propuestas interactúan más de dos cuadros matemáticos (verbal, numéricos, gráfico). Cabe aclarar que acogemos la propuesta de Regine Douady (1988) según la cual cada cuadro está constituido por objetos de una rama de las matemáticas, las relaciones entre los objetos, y las formulaciones e imágenes mentales asociadas a ellos.

La secuencia didáctica completa comprende tres tipos de situaciones a saber ;

- Situación de acción o argumentación : en ella el estudiante se enfrenta al problema con las competencias de que dispone y que pueden en el acto de solucionar el problema convertirse en obstáculos o ayudas.
- Situación de validación : incluye situaciones de familiarización y rutinización. En ellas se presentan problemas semejantes a los iniciales. Permiten al profesor conocer lo que los estudiantes han aprendido efectivamente. En estas situaciones se incluyen la socialización de los resultados obtenidos individualmente por los alumnos. Ello implica que se desarrolle una discusión para buscar la validación y por esto el trabajo en estas situaciones se realiza en pequeños grupos.
- La situación de reutilización : busca la transferencia de lo aprendido a problemas más complejos. Ello obliga al estudiante a establecer relaciones entre las conceptualizaciones realizadas y avanzar en ellas.

Se considera que el alumno al iniciar cada situación dispone de competencias que le permiten abordar las tareas y que representan saberes y conocimientos expresables y reconocidos como tales. Las competencias distinguidas en un tratamiento son :

- Competencias disponibles : son aquellas con las cuales se inicia un procedimiento de solución.
- Competencias esperadas : son aquellas que se supone los estudiantes adquirirán durante el tratamiento.

5. Situaciones de la secuencia didáctica.

5.1. Situación de acción y argumentación.

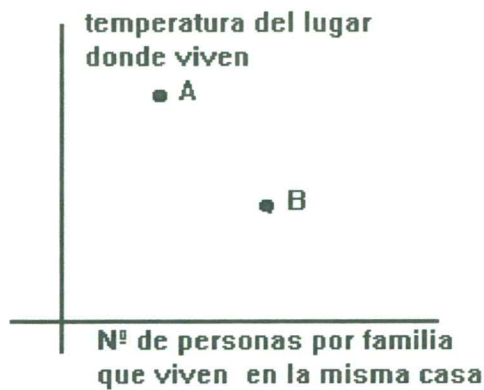
En el siguiente cuadro se presentan los objetivos esperados, los objetos de estudio y las competencias tanto disponibles como esperadas en los estudiantes, correspondientes a la situación en cuestión.

<u>Objetivos del problema :</u> • Instaurar el estudio de los gráficos como sistema de representaciones matemáticas que codifica aspectos relevantes de la variación • Dar a los estudiantes herramientas para la interpretación aproximada de gráficos • Introducir la noción de variación	<u>Objetos de estudio</u> Gráfico, Análisis de variación de magnitudes asociadas, ubicación de puntos incrementos de crecimientos, según el lugar que ocupan los puntos en relación a la lejanía o cercanía del punto ceros de los ejes , o entre si Preálgebraico la información verbal tipo retórica se constituye en la fuente para relacionar variaciones de cada variable.	<u>Las competencias:</u> Las competencias que se suponen tienen los estudiantes, son las adquiridas socialmente a través de la lectura de información social y deportiva de gráficos, y que le permiten al estudiante intuitivamente: • identificar magnitudes que intervienen • Leer valores cualitativos correspondientes a las abscisas y ordenadas de cada uno de los puntos <u>Las que se esperan adquieran los estudiantes son:</u> • Identificar la variación dentro de cada una de las magnitudes • Comparar cualitativamente valores de una magnitud • Identificar información dada a través de puntos • Trasladar información entre cuadros, gráficos y verbales, para obtener nueva información <u>La competencia que debe estar disponible y que según el caso se pueden convertir en ayudas u obstáculo son :</u> Resolución de situaciones problemas como aspecto introductorio en la construcción de ideas matemáticas
--	--	--

Para el desarrollo de la situación se ha seleccionado la siguiente tarea :

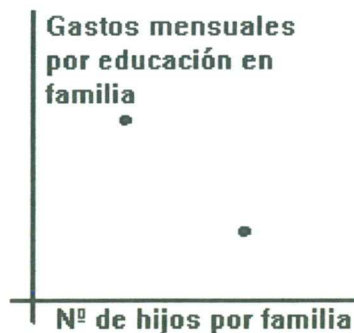
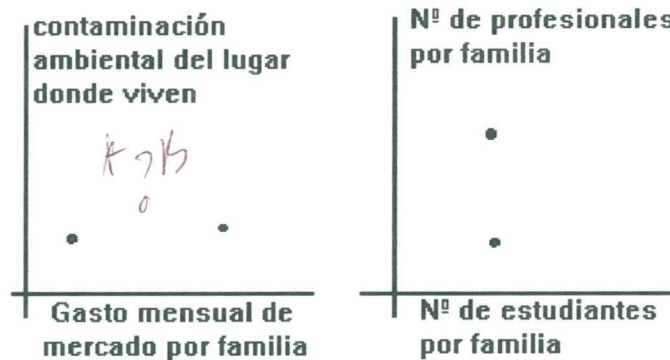
Alvaro y Beatriz se conocieron durante las vacaciones de Diciembre y se hicieron amigos. ¿Quiénes son?, ¿Donde viven?, ¿Cómo son sus familias?, son preguntas que se pueden contestar al leer la información presentada en las siguientes fotos y diagramas. (Se presentan fotos de las casas de Alvaro y Beatriz)

La siguiente gráfica informa sobre algunas características del lugar donde viven Alvaro y Beatriz. Analícela y conteste las preguntas



- ¿Viven en ciudades diferentes?
- ¿Quién vive en clima caliente?
- ¿Tiene Beatriz más hermanos que Alvaro?
- ¿Cómo es la casa de cada uno?
- ¿Cuál de las familias gastará más en Educación?
- ¿Son Beatriz y Alvaro estudiantes?

Es posible que algunas de las preguntas anteriores no tengan aun respuesta. A continuación se presentan otros gráficos con los cuales se puede obtener mas información.



- ¿Es Alvaro un profesional?
- ¿En qué se parecen las ciudades en que viven Alvaro y Beatriz?
- ¿En cuál de las familias hay menos estudiantes?
- ¿A cuál de estas familias se parece su familia?
- ¿Es cierto que Beatriz es hija única?

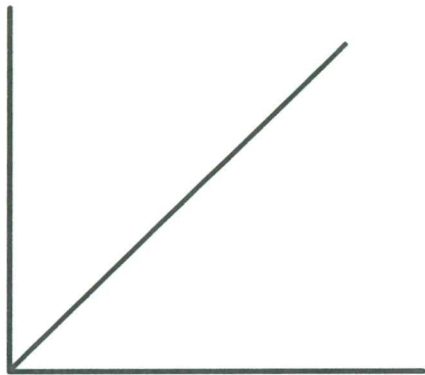
- ¿En caso de que le propusieran visitar a Alvaro y a Beatriz, ¿a cuál visitaría?
- ¿Serán los abuelos de Beatriz profesionales?

También forma parte de la primera situación el siguiente problema :

Invente situaciones que representen cada una de las siguientes gráficas

Gráfica 1

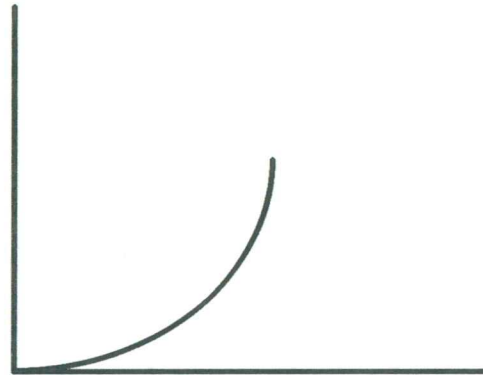
Precio de los artículos



Nº de artículos

Gráfica 2

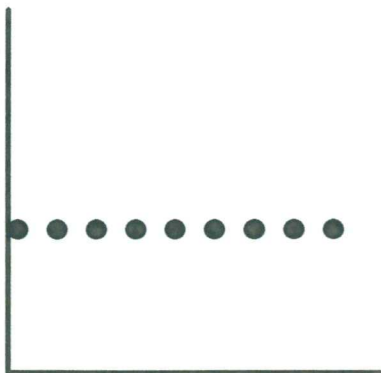
Nº de personas contagiadas por el abrazo del pato



Tiempo

Gráfica 3

Salario mensual



Meses

Gráfica 4

Altura



Tiempo

Teniendo en cuenta las gráficas anteriores responda las siguientes preguntas :

En la gráfica 1 :

- Si Ana compra cierta cantidad de artículos y José compra otra cierta cantidad, pero Ana paga menos que José ¿Qué puedes afirmar del número de artículos comprados por Ana y José?.
- En la gráfica identifica ¿qué sucede cuando Pedro compra más artículos que Carlos?.

En la gráfica 2 :

Qué puede deducir del contagio del “abrazo del pato”?

En la gráfica 3 :

Se puede afirmar:

- Qué el salario mensual aumenta o disminuye?. Explique su respuesta.
- Según la gráfica el salario devengado depende del mes que se paga?. ¿Por qué?. Explique su respuesta.

En la gráfica 4 :

- Si aumenta el tiempo qué le sucede a la altura?. Explique su respuesta.
- El cambio en la altura depende del cambio del tiempo?.

En las gráficas 1, 2, 3, y 4 :

De que depende:

- El costo de los artículos?.
- El número de personas contagiadas por el abrazo del pato?

Los resultados correspondientes a esta primera situación se describen a continuación :

- Competencias disponibles : Identificación de las magnitudes que intervienen, lectura de valores cualitativos presentes en la representación.

Preguntas	Identificación de las magnitudes			
	SI	NO	OTRAS	No responde
Primera tarea	26	5	2	2
Segunda tarea	25	6	2	2

Preguntas	Lectura e interpretación de información gráfica			
	SI	NO	OTRAS	No responde
Primera tarea	20	11	3	1
Segunda tarea	22	9	2	2

En las tablas se muestra que los alumnos disponen de las que hemos llamado competencias disponibles, tanto en lo referente a la identificación de magnitudes (aprox. 74%), como en lo referente a la lectura de información (aprox. 65%).

- Competencias esperadas : identificación de la variación, lectura y comparación cualitativa de valores, traslado de información entre cuadros para obtener nueva información establecimiento y uso de conjeturas. Las siguientes tablas muestran los resultados correspondientes a la identificación de la variación y al establecimiento de conjeturas.

Preguntas	Identificación de la variación.			
	SI	NO	OTRAS	No responde
Primera tarea	23	8	2	2
Segunda tarea	19	6	0	0

	Establecimiento y uso de Conjeturas			
Preguntas	SI	NO	OTRAS	No responde
Primera tarea	21	8	3	3
Segunda tarea	29	6	0	0

Estos resultados muestran que se lograron en alto porcentaje las competencias esperadas tanto para la identificación de la variación (aprox. 60%) como para el establecimiento de conjeturas (aprox. 71%).

5.2. Situación de familiarización y rutinización.

En esta situación se propone al estudiante utilizar lo aprendido en la primera situación, en problemas o tareas similares o cercanas a las estudiadas. Las competencias disponibles y esperadas, los objetivos y los objetos de estudio se presentan en el siguiente cuadro :

<u>Objetivos del problema :</u> • Anticipar a través de procesos aritméticos de variación la noción de variable. • Usar las tablas para analizar situaciones funcionales numéricamente. • Identificar la dependencia en representaciones tabulares y gráficas.	<u>Objetos de estudio :</u> • En el cuadro numérico, la completación e interpretación de tabla sirve para el estudio de la variación y la dependencia ; las tareas exigen conjeturas y comparación de variaciones. • En el cuadro gráfico la situación aborda la representación cartesiana de cantidades que muestran una dependencia funcional respecto del tiempo. Las tareas exigen la traslación entre los diferentes tipos de representación y la selección de diferentes tipos de gráficas. • En el cuadro preálgebraico, la situación exige establecer dependencias entre cantidades de forma oral y escrita retóricamente.	<u>Competencias disponibles :</u> • Leer y estimar la variación de las cantidades relacionadas en una tabla o en una gráfica. • Interpretar la variación. • Enunciar formas de dependencia entre cantidades. <u>Competencias disponibles que pueden convertirse en ayudas u obstáculos.</u> • Resolución de situaciones problema por medio de procesos aritméticos e interpretación de gráficas. <u>Competencias esperadas :</u> • Conjeturar sobre hechos globales como el cambio de la temperatura en el día, sin la medición cuantitativa. • Relacionar representaciones tabulares y gráficas con la dependencia. • Enunciar la dependencia.
--	--	---

Las situaciones problema se plantean a través de la siguiente tarea :

La siguiente tabla relaciona la forma cómo varía la temperatura el día en Bogotá

	Establecimiento y uso de Conjeturas			
Preguntas	SI	NO	OTRAS	No responde
Primera tarea	21	8	3	3
Segunda tarea	29	6	0	0

Estos resultados muestran que se lograron en alto porcentaje las competencias esperadas tanto para la identificación de la variación (aprox. 60%) como para el establecimiento de conjeturas (aprox. 71%).

5.2. Situación de familiarización y rutinización.

En esta situación se propone al estudiante utilizar lo aprendido en la primera situación, en problemas o tareas similares o cercanas a las estudiadas. Las competencias disponibles y esperadas, los objetivos y los objetos de estudio se presentan en el siguiente cuadro :

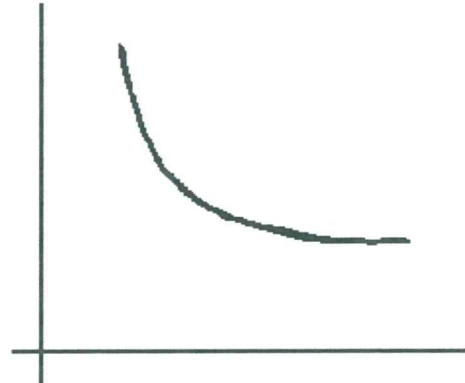
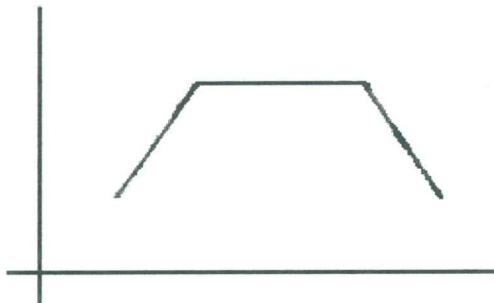
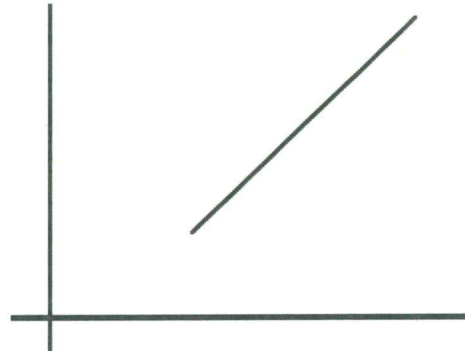
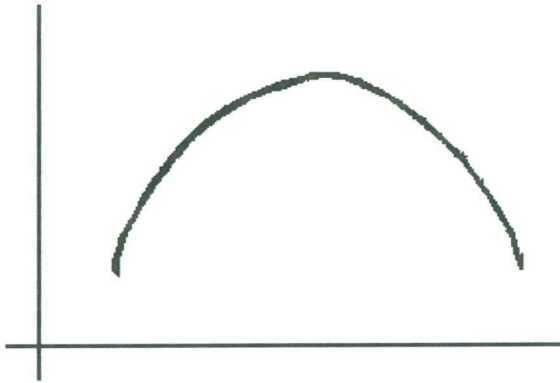
<u>Objetivos del problema :</u> • Anticipar a través de procesos aritméticos de variación la noción de variable. • Usar las tablas para analizar situaciones funcionales numéricamente. • Identificar la dependencia en representaciones tabulares y gráficas.	<u>Objetos de estudio :</u> • En el cuadro numérico, la completaron e interpretación de tabla sirve para el estudio de la variación y la dependencia ; las tareas exigen conjeturas y comparación de variaciones. • En el cuadro gráfico la situación aborda la representación cartesiana de cantidades que muestran una dependencia funcional respecto del tiempo. Las tareas exigen la traslación entre los diferentes tipos de representación y la selección de diferentes tipos de gráficas. • En el cuadro prealgebraico, la situación exige establecer dependencias entre cantidades de forma oral y escrita retóricamente.	<u>Competencias disponibles :</u> • Leer y estimar la variación de las cantidades relacionadas en una tabla o en una gráfica. • Interpretar la variación. • Enunciar formas de dependencia entre cantidades. <u>Competencias disponibles que pueden convertirse en ayudas u obstáculos.</u> • Resolución de situaciones problema por medio de procesos aritméticos e interpretación de gráficas. <u>Competencias esperadas :</u> • Conjeturar sobre hechos globales como el cambio de la temperatura en el día, sin la medición cuantitativa. • Relacionar representaciones tabulares y gráficas con la dependencia. • Enunciar la dependencia.
--	---	---

Las situaciones problema se plantean a través de la siguiente tarea :

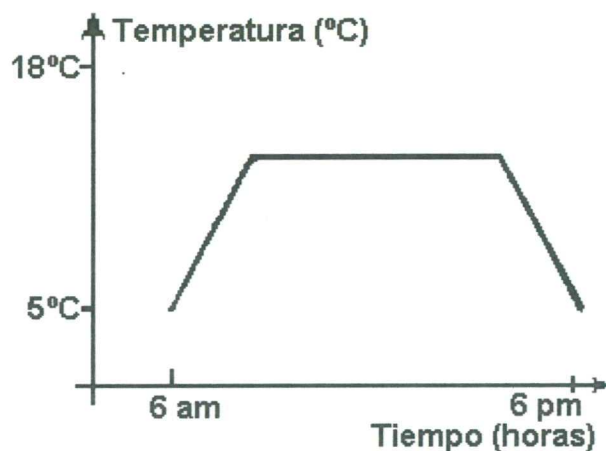
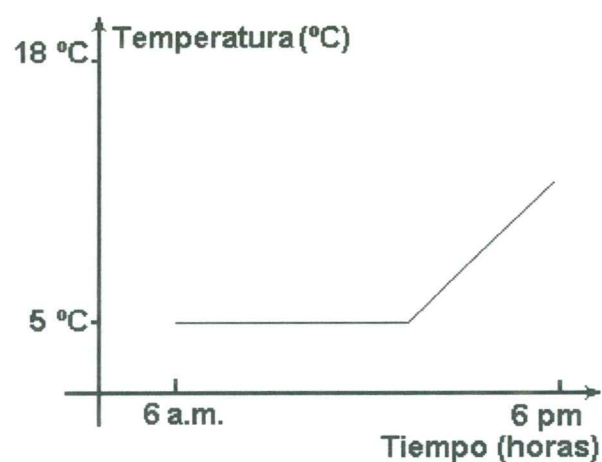
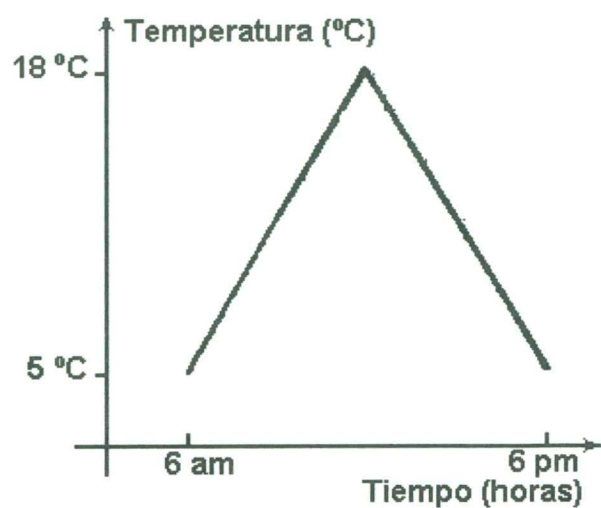
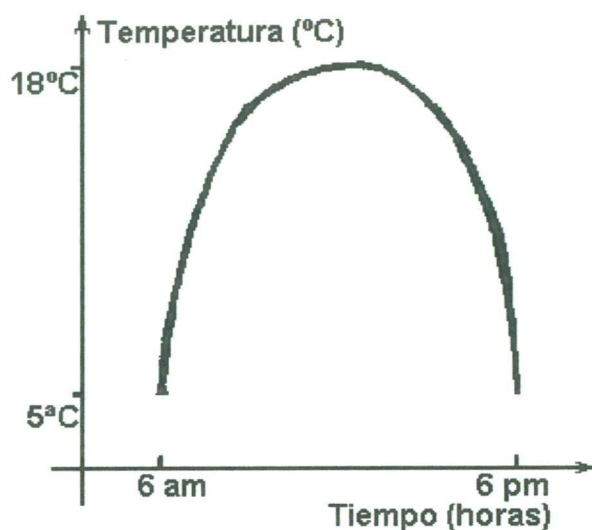
La siguiente tabla relaciona la forma cómo varía la temperatura el día en Bogotá

Hora	t °C
6 a.m.	5
8 a.m.	
4 p.m.	7
6 p.m.	

- Entre las 8 a.m. y las 12 m. la temperatura ¿ aumentará o disminuirá ?. Explique
- En qué horas la temperatura alcanza su máximo valor?
- Identifique en las siguientes gráficas ¿ cuál de ellas representa mejor la respuesta a la pregunta 2 ?



- Complete la tabla colocando posibles temperaturas para cada dos horas.
- Entre qué valores varía la temperatura y entre qué valores el tiempo?
- A medida que avanza la mañana qué le sucede a la temperatura?
- A medida que transcurre la tarde, qué le ocurre a la temperatura?
- Identifique en las siguientes gráficas ¿ cuál representa la variación de la temperatura a lo largo de un día en Santafé de Bogotá ? :



- Elabore una gráfica que represente la variación de la temperatura, en un día en la ciudad de Cartagena de Indias.

Los resultados de la situación de rutinización y familiarizaron se presentan a continuación.

- Competencias disponibles : Calcular valores de variación e interpretar estas variaciones, enunciar oralmente dependencias entre cantidades.

Preguntas	Calcular e interpretar variaciones			
	SI	NO	OTRAS	No responde
tarea única	30	2	2	1

Como resultado de la elaboración de la situación anterior, los alumnos en un 86% manejan las competencias propias para esta segunda situación.

Oralmente cerca del 90% de los alumnos explica dependencia entre cantidades, sin embargo presentan marcadas dificultades al pasar a lo escrito. Esto es un obstáculo permanente en el registro de esta competencia.

- Competencias esperadas : Conjeturar sobre hechos globales de dependencia, relacionar representaciones tabulares y gráficas, enunciar por escrito la dependencia entre cantidades.

	Conjeturar sobre hechos de la dependencia			
Preguntas	SI	NO	OTRAS	No responde
tarea única	30	3	2	0

	Relacionar representaciones tabulares y gráficas.			
Preguntas	SI	NO	OTRAS	No responde
tarea única	26	6	1	2

	Enunciar por escrito la dependencia.			
Preguntas	SI	NO	OTRAS	No responde
tarea única	20	10	3	2

Aunque se logran las dos primeras competencias en forma amplia (86% conjeturar y 74% relacionar) la otra competencia muestra niveles bajos (57%) debido una vez mas a la dificultad que tienen los niños para trasladar lo oral a la escritura.

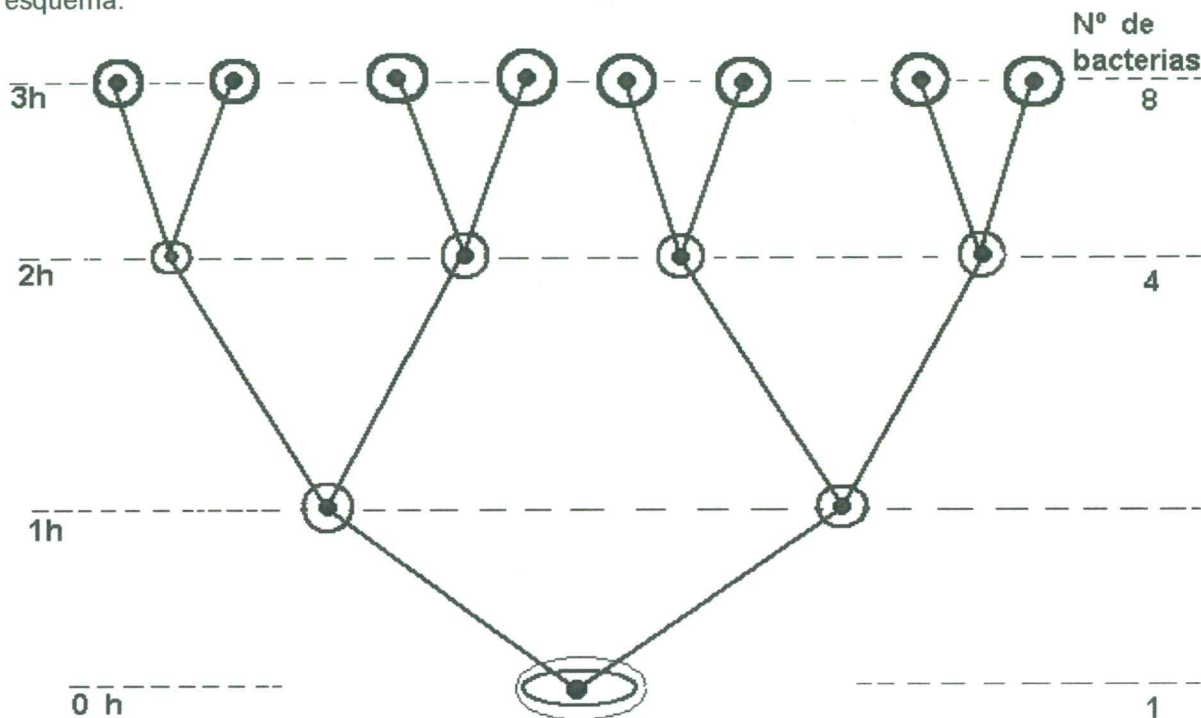
5.3. Situación de reutilización en problemas complejos.

En esta situación se propone al estudiante aplicar los conocimientos obtenidos en las situaciones anteriores en una tarea o problema mas complejo inscrito en un contexto diferente a los anteriores.

Objetivos del problema : • Aplicar procesos aritméticos para establecer la variación presente en el crecimiento de la bacteria del cólera. • Identificar la dependencia entre la cantidad de bacterias y el tiempo.	Objetos de estudio : • La variable considerada es discreta en el campo aritmético. • La variación presente no es de tipo aditivo pero se sigue trabajando sobre la dependencia. • En el cuadro prealgebraico, la situación exige establecer dependencias entre cantidades de forma oral y escrita retóricamente.	Competencias disponibles : • Lectura e interpretación de la variación tanto en el cuadro numérico como en el cuadro gráfico de una manera cualitativa y cuantitativa y global. • Enunciar de manera oral dependencias entre cantidades. Competencias esperadas : • Relacionar representaciones tabulares y gráficas con la representación diagramática de la dependencia. • Enunciar por escrito la dependencia entre tiempo y numero de bacterias.
---	---	---

Las tareas o problemas de esta situación se plantean a través del siguiente enunciado :

A una cierta temperatura una bacteria de cólera se reproduce según el siguiente esquema:



- En el diagrama represente cuántas bacterias se han reproducido a las seis horas.
- Entre la primera y la tercera hora se aumenta o disminuye el número de bacterias?. ¿Entre la segunda y la cuarta hora se aumenta o se disminuye el número de bacterias?
- Transcurridas 24 horas qué se puede afirmar del número de bacterias reproducidas.
- De qué depende la reproducción de la bacteria del cólera?

Los resultados de la situación de reutilización se condensan en las siguientes tablas.

- Competencias disponibles : la lectura e interpretación cualitativa, cuantitativa y global de la variación, el enunciado oral de la dependencia entre cantidades.
De acuerdo con los resultados de las fases anteriores se considera que las dos competencias planteadas están realmente disponibles para abordar el problema de reutilización.

- Competencias esperadas : relacionar las diferentes representaciones de la dependencia, enunciar por escrito la dependencia entre cantidades.

Preguntas	Relacionar las diferentes representaciones de la dependencia			
	SI	NO	OTRAS	No responde
tarea bacterias	27	4	2	2

Preguntas	Enunciar por escrito la dependencia entre cantidades			
	SI	NO	OTRAS	No responde
tarea bacterias	18	9	6	2

Los estudiantes logran en un 77% proponer relaciones entre las diferentes representaciones de la variación y la dependencia ; sin embargo solo un 51% logra expresar en forma escrita como se da la relación de dependencia entre el tiempo y el numero de bacterias del cólera presentes en cada momento.

6. CONCLUSIONES.

La ingeniería didáctica permite poner a prueba planteamientos didácticos, porque su validación es interna, es decir no exige la disponibilidad de un curso control. Basta comparar los resultados iniciales con los resultados finales obtenidos después de la aplicación de un tratamiento.

Las restricciones que se presentan a la aplicación de estas experiencias, por una parte el tiempo, por cuanto los diseños curriculares de los colegios no están abiertos a ofrecer la posibilidad del trabajo en aula en situaciones diferentes a las regulares, y por otra parte, las mismas condiciones de los alumnos que deben ambientarse a las condiciones especiales que plantea una experimentación de este tipo.

En cuanto a la propuesta en si, se considera que la variable en juego ha sido el contenido de la temática utilizada para abordar la noción de función como dependencia. En tal contenido se han utilizado situaciones cotidianas a los alumnos, y en las cuales ellos se desenvuelven con naturalidad. Los resultados muestran que efectivamente se dio un proceso de aproximación al concepto de función como dependencia y también a la construcción de la variable como herramienta útil en la modelación de fenómenos de la vida real y científica.

BIBLIOGRAFÍA :

- ARTIGUE, M.(1995) Didáctica en Ingeniería Didáctica de la revista Educación Matemática. Una Empresa Docente. Grupo Editorial Iberoamérica 1995
- DOUADY, R.(1995) La Ingeniería Didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento en Ingeniería Didáctica de Una Empresa Docente. Grupo Editorial Iberoamérica.
- FARFAN, R.M. (1955) Ingeniería Didáctica. Cuadernos Didácticos. Cinvestav I.P.N.
- GARCIA,G. SERRANO,C. ESPITIA,L.E. (1995) Elementos para construir una Didáctica de la Función. Cuadernos de Investigación. Universidad Pedagógica Nacional.
- VINNER, S.(1992) The Function Concept as a Prototype for Problems in Mathematics Learning. The Concept of Function, Aspects of Epistemology and Pedagogy. E. Dubinsky and G. Harel Editors.
- DEULOFEU,J. (1995) Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre distintas gráficas de funciones. Revista de didáctica de la matemáticas No.4.

Variables institucionales en el conocimiento profesional del profesor: el caso de la función.

Introducción

En este estudio analizamos cómo las concepciones institucionales sobre la didáctica de la función que promueve la formación profesional en educación matemática, deben ser tenidas en cuenta como posibles variables explicativas de las inconsistencias y errores de profesores y estudiantes.

El estudio se justifica porque el grupo de investigación ha tomado como problemática el establecimiento de los elementos que han de ponerse en juego para propiciar el aprendizaje de las matemáticas en situación escolar. En particular, resalta la necesidad de contribuir a la sistematización del área de la Didáctica de la Matemática, como área de disciplina académica en la profesionalización del profesor de matemáticas puesto que, las posibilidades de un cambio en los programas depende en gran medida de caracterizar el entramado de relaciones institucionales que hacen parte de los cambios y de los cuales es necesario tomar consciencia para su control. Con esta afirmación pretendemos adoptar una visión holística para el estudio del conocimiento profesional del profesor, no simplemente como proceso cognitivo, sino como proceso inscrito en un marco de procedencia, lo institucional.

La variante institucional vehiculada en programas y textos ha venido siendo incluida como variable explicativa de las concepciones de los estudiantes. (Ruiz Higuera, 1994; El Bouazzaoui, 1988). El Bouazzaoui introduce la expresión "concepciones colectivas" para designar los distintos tipos de conocimiento matemático transmitidos por programas y textos escolares.

También la investigación sobre el conocimiento pedagógico del profesor en el caso de la función y objetos asociados, (El Bouazzaoui, 1988; Llinares, 1996) ha venido integrando variantes externas – experiencia y formación, perspectiva biográfica de los profesores – en reconocimiento a que la experiencia previa de aprendiz de profesor hace parte esencial de su conocimiento profesional, esta variante es relevante si se tiene en cuenta que los procesos institucionales varían de un país a otro, y aún dentro de un mismo país.

Nos basamos también en resultados de investigaciones (Lerman 1988, Carrillo y Contreras 1995), en las cuales se muestra que las concepciones de los profesores sobre la matemática tienen una influencia sobre el enfoque didáctico con el cual se aborda la enseñanza de un concepto y pueden desempeñar un papel de filtro en la adaptación de innovaciones y desarrollos curriculares.

El estudio se realiza con 7 profesores de Matemáticas en la Educación Básica, quienes algunas semanas antes, en un curso vacacional de cualificación, habían vivido una situación de aprendizaje referente a la didáctica del concepto de función.

Delimitación del constructo,, variables de referencia

En la noción de concepción se distinguen dos sentidos; cognitiva, referida al sujeto y epistemológica, referida al estudio de la génesis histórica de los conceptos, o a las transmitidas por la enseñanza.

Chevellard (1988) propone ir más allá en la significación de la concepciones al señalar que la significación, uso y restricciones de un concepto pueden ser diferentes en cada

institución y por lo tanto las concepciones del sujeto estarán influidas por la institución de la cual forma o ha formado parte. Al enmarcar las concepciones cognitivas dentro del marco institucional se resalta la dependencia institucional en la construcción del significado. Chevallard (1988) ha elaborado un sistema teórico en torno a lo que ha denominado *relación al saber* el que explica en una metáfora constituida por un paisaje nocturno, un faro con un haz de luz que ilumina el paisaje y que describe como:

*“Este nuevo concepto, - **relación al saber**- se eleva a priori sobre una base metafórica. Pero la metáfora ha cambiado. En lugar de reenviar a un movimiento por el cual un objeto de saber - pasaría de un lugar exterior al individuo, a un lugar interior - la cabeza, la mente, el cerebro -, la metáfora explotada reenvía a la imagen del faro que ilumina localmente un paisaje nocturno. El paisaje es el saber, el faro el individuo, el haz luminoso **la relación al saber**. Diremos entonces que el individuo tiene cierta relación al saber - a tal o cual cuerpo del saber o a tal cual objeto del saber “ (Chevallard citado por Ruiz H., 1994, p. 65).*

En la *relación al saber* Chevallard distingue dos diferentes tipos: relación personal, y relación institucional. La relación de un individuo con un saber se realiza en el marco de situaciones institucionalizadas, es decir la relación personal emerge del sistema de relaciones institucionales. Por su parte, las instituciones establecen una relación con el saber, puesto que fijan características para definir usos o empleos modelizantes del concepto, lo que caracteriza las relaciones que dicha institución mantiene con un determinado saber.

Godino y Batanero (1993), introducen un sistema teórico inspirado en la propuesta de Chevallard, a partir de la actividad de resolución de un campo de problemas y de los sistemas de práctica asociados. En estas, distinguen dos tipos: prácticas personales y prácticas institucionales. Las primeras dependen del sujeto, las segundas son socialmente compartidas por los sujetos de una misma institución. Estas últimas producen progresivamente la emergencia de objetos institucionales, los cuales se convierten en entidades culturales pues son dotadas de propiedades y empleadas en la resolución de problemas. A este proceso lo definen como *significado del objeto institucional*. Para Godino y Batanero, la noción de concepción del sujeto, puede describirse como emergente del sistema de prácticas personales asociadas a objetos institucionales. El objeto y el significado del mismo, pueden ser observados en el sistema de prácticas de la institución. El aprendizaje y desarrollo de las personas, en particular la de los maestros, se realiza en diversas instituciones, lo cual determina que el significado de ciertos objetos matemáticos y el conocimiento profesional puede no ser el mismo de una institución a otra.

De esta manera al analizar las prácticas institucionales sobre la didáctica del objeto función y el conjunto de prácticas de aprendizaje asociadas a través de un texto elaborado explícitamente con este fin, se pueden identificar y analizar la didáctica del objeto y su significado institucional y, contrastarlos con los fines, objetivos, motivación y errores que el profesor asocia a la enseñanza del objeto función.

Aspectos metodológicos

Por ser éste un campo de investigación reciente, presenta problemas metodológicos delicados, por esta razón la construcción del modelo teórico para establecer las relaciones entre el significado institucional de la didáctica y la práctica de ésta por parte de los maestros, busca ser un intento para avanzar en superar las dificultades al respecto.

El método empleado consistió en un estudio de caso con 7 profesores de matemáticas en la Educación Básica, con experiencia en los niveles escolares donde se enseña el concepto de función en Santafé de Bogotá. Cabe anotar que estos docentes procedían de una muestra más amplia, la cual permitió una elección ajustada a nuestros intereses.

Para lo institucional, los datos fueron extraídos de un texto escrito para ser utilizado con docentes en el curso de cualificación y en el cual se describen los aspectos referidos a las orientaciones didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de la noción. Se elaboró un análisis de la didáctica inducida realizando un análisis de contenido (Weber, 1986), sobre las siguientes variables: modo de presentación de los conceptos teóricos respecto a los problemas y ejercicios; ejemplos propuestos; relación establecida entre la función y los objetos matemáticos relacionados con ella.

Para el conocimiento sobre el concepto de función de los profesores, se replica el estudio de Alexander Norman (1990) quien propone identificar el conocimiento de función desde la comprensión. Norman considera la comprensión determinada por dos aspectos: la comprensión instrumental y la relacional. La primera está referida a una comprensión algorítmica, por cuanto el sujeto aplica reglas o fórmulas para resolver situaciones sin saber el porqué de la elección de esa herramienta ni cual es su relación con el concepto. Por ejemplo: el uso de la línea vertical para determinar si una representación gráfica corresponde o no a una función, es utilizada indiscriminadamente si no se tienen en cuenta las características de la situación en donde se utiliza, como en el caso de la representación gráfica polar de una función. En la misma forma, la identificación de un y separado de un x por $=$, puede ser asumida como algorítmica, puesto que el $=$ se convierte en garantía de la unicidad de la correspondencia. En la comprensión relacional se establecen las relaciones entre el concepto y los procesos asociados, por consiguiente el sujeto puede seleccionar en cuales situaciones puede usar el concepto y los procesos adecuados. Para el caso del uso del test de la línea vertical, por ejemplo, se tiene una comprensión relacional cuando el estudiante discrimina la situación en donde es aplicable. Con base en esta teoría Norman identifica los siguientes aspectos para determinar el conocimiento de función.

1. Ejemplificación y caracterización de funciones realizadas a través de la definición personal y formal y los correspondientes ejemplos.
2. Habilidad para el uso de funciones en una variedad de contextos: aplicaciones del concepto en situaciones de la vida real o científica.

3. Razonamiento funcional: habilidades para interpretar, generalizar y deducir propiedades relativas a las funciones en representaciones gráficas, algebraicas y tabulares.

Los datos son extraídos de una prueba con tres ítems referidos a los aspectos descritos. (anexo 2)

El conocimiento sobre el objeto función se integra a las representaciones que el profesor tiene sobre la enseñanza y el aprendizaje, conformando lo que distintos investigadores (Norman, 1990, Llinares, 1995) denominan conocimiento profesional. Para obtener los datos correspondientes a esta categoría se propuso un cuestionario para identificar fines, objetivos, motivación y errores que el profesor asocia a la enseñanza del objeto función y en el cual las declaraciones y argumentaciones de los profesores son tenidas en cuenta para determinar la coherencia. Se realizó un análisis vertical en un mismo individuo y un análisis horizontal entre individuos con el fin de minimizar las diferencias interpretativas. (anexo 2)

Significado institucional de la didáctica del concepto función

En la unidad "Un tratamiento didáctico del concepto de Función", documento utilizado como material de instrucción en el curso recibido por los docentes de la muestra, se resalta, en primer término, la importancia del concepto de función dentro de la Matemática, como una noción fundamental en el desarrollo de la disciplina y todas sus ramas y también como instrumento de trabajo en todas ellas. Se destaca su poder como herramienta para describir, expresar y explicar fenómenos de la ciencia y la vida real. El modelo de presentación del concepto podría considerarse a simple vista inductivo, puesto que se proponen una serie de actividades como "Funciones en el mundo real", descritas en los recibos de servicios públicos, o "Funciones a partir de situaciones prácticas" en las que el concepto puede ser herramienta de modelación, asociado a una concepción de dependencia, pero la práctica de aprendizaje deja entrever que no es ésta la intención pues, afirmaciones como: "en la siguiente situación observe que a cada estudiante le corresponde una medida de estatura", "ningún estudiante tiene dos estaturas", muestran las invariantes lógicas de la función como correspondencia. Por lo tanto las actividades didácticas "tratan de dar una explicación, con los cánones de la matemática formal, a las situaciones provenientes de la problemática real" (Carrillo, Contreras, 1995, p. 83).

Una vez trabajadas estas situaciones, se presenta la definición de función como terna y notada como (f, A, B) ; sin embargo, los ejemplos y ejercicios propuestos inducen tanto a una concepción de aplicación, como de correspondencia; los ejercicios posteriores no son aplicación de la definición, enfatizan situaciones de dependencia pero se insiste en preguntar el valor correspondiente de la variable dependiente para valores dados de la variable independiente. Sin embargo, aparece una pregunta que se aleja de esta tendencia: "¿Cuál es el dominio y el rango de cada relación definida mediante la tabla?", que claramente se inscribe dentro de la concepción de función como aplicación entre conjuntos.

En conclusión el objeto privilegiado es la función como terna, como aplicación y correspondencia en su orden de presentación. Esta última es la utilizada en los ejemplos,

ejercicios y posteriores aplicaciones del concepto a otros objetos matemáticos (grafo, operación unaria y binaria,...). Por su parte la aplicación es ejercitada a través de la identificación del dominio y rango de funciones propuestas. Específicamente estos objetos son los que van a convertirse en técnicas para los profesores, puesto que la gran mayoría de ellos utilizó esquemas tipo $f: R \rightarrow R$ como único argumento para mostrar que expresiones algebraicas son funciones.

La representación asociada es el diagrama cartesiano en su aspecto estático, con el fin de identificar la correspondencia y establecer su característica y el diagrama sagital. Sin embargo no se propone un estudio global ni dinámico de la gráfica de la relación funcional, ni tampoco se proponen tareas que lleven a la interpretación de la variación y la dependencia de las variables.

El análisis del texto del curso comparte la presentación que los textos, desde la reforma de Matemáticas Modernas, han venido haciendo del concepto de función (García G., Serrano C., Espitia L., E. 1996, 1997), la concepción de aplicación con su invariante y la representación asociada diagrama sagital.

El objetivo didáctico es enunciado en los siguientes términos: “Proporcionar recursos prácticos para estudiar el concepto de función en los diferentes niveles de la Educación Básica”; pero, tal parece que el conjunto de prácticas asociadas a la definición del objeto es la que determina los recursos didácticos para que el profesor los traslade a la enseñanza. Se puede concluir que no se reconocen las adaptaciones que debe sufrir el concepto cuando es trasladado al ámbito escolar puesto que, afirmaciones como “se presentan actividades didácticas que pueden realizarse en diferentes niveles de la educación Básica” o “el tema de funciones puede ser introducido a través de diferentes tópicos para lograr su formalización en los cursos octavo y noveno”, explicitan claramente que se desconocen tales adaptaciones y que el significado institucional de la didáctica se encuentra aún sustentado en el supuesto de “transparencia entre saber matemático y las matemáticas escolares”, puesto que la didáctica sigue asegurada a la lógica de la disciplina y por lo cual basta con que el profesor conozca la formalización del concepto.

Conocimiento del objeto función

Todos los profesores parecen estar a favor de utilizar el dominio y el rango como técnica algorítmica que identifica el concepto, tanto en su definición formal como personal. Argumentos como: “*para determinar la funcionalidad de expresiones algebraicas se hace necesario especificar los conjuntos sobre los cuales se realiza la función*”, y el uso de esquemas como “ $f: R \rightarrow R$ ”, evidencian esta tendencia.

Contrastan estos resultados con los de Hitt (1996), quien señala que los profesores “no identificaron con facilidad las representaciones relativas a los subconceptos Dominio y Conjunto Imagen”, lo que deja entrever la presencia de la variable institucional en la formación del profesor, por cuanto esta invariante fue la utilizada por los profesores para reconocer las funciones y enfatizada en el curso.

Las definiciones personales revelan una concepción restringida del objeto puesto que para su identificación necesitan comprobar la unicidad de la correspondencia. Para “ver” esta clase de asignación un profesor traduce la tabla (pregunta 6)

x	0	1	-1	2	3	$\frac{1}{2}$	
y	0	1	0	6	4	$\frac{3}{4}$	

al diagrama sagital, como modo de argumentar la funcionalidad.

$0 \rightarrow 0$
 $1 \rightarrow 1$
 $-1 \rightarrow 0$
 $2 \rightarrow 6$
 $3 \rightarrow 4$
 $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{4}$

La representación usada con preferencia por todos los maestros, es el diagrama sagital. Cuatro de los siete maestros utilizaron en su definición informal la *máquina*, interpretada como procesador u operador que actúa para obtener un resultado. Esta definición aparentemente se aparta de lo institucional hasta ahora definido, pero es la que promueve el programa curricular vigente y es coherente con las respuestas dadas por los maestros a la pregunta sobre fines y objetivos de la enseñanza del concepto (pregunta 3) en la educación básica, pues todos definen su importancia por ser “*un tema del currículo*.” La representación gráfica cartesiana sólo es utilizada por un profesor, después de darle valores numéricos – naturales –, a una expresión algebraica, buscando mostrar la correspondencia.

Esta tendencia aún se demuestra en las tareas donde se pide establecer la funcionalidad de representaciones gráficas (pregunta 6), pues fueron contestadas tan sólo por dos profesores, siempre y cuando determinaran numéricamente el dominio y el rango. La funcionalidad de la representación gráfica polar fue contestada únicamente por estos dos maestros, quizá la dificultad de su establecimiento, se debe a la imposibilidad de establecer la unicidad. Las respuestas de los profesores contrastan con los resultados encontrado por varios investigadores (Clements, 1984; Mundy, 1984; Swan, 1988) quienes encuentran que los estudiantes prefieren pensarlas simbólicamente.

Hay algunos factores que pueden explicar esta tendencia. En primer lugar, las prácticas de aprendizaje del profesor enfatizan esta prioridad; aún en las situaciones de dependencia con las cuales se trata de motivar su introducción, anotaciones como las descritas, junto con el diagrama sagital, como única representación que muestra ostensiblemente esta variable, conllevan a establecer este tipo de tendencia. En segundo lugar, la definición presentada en el programa curricular oficial de la función como “relación especial que cumple la condición de unicidad” y a la cual también se le asocia el diagrama sagital, unida a la amplia experiencia en la enseñanza del concepto (6 años y medio), llevan a que el profesor se ratifique en esta opción.

La didáctica institucional que mediatiza el aprendizaje y el desempeño del profesor, genera dificultades e inconsistencias con el saber personal, puesto que en las respuestas a las tareas donde se solicita formular problemas para usar funciones (pregunta 13), emergen ideas intuitivas sobre el objeto de función, tales como:

“*crecimiento o decrecimiento en el consumo del café y su repercusión en la economía*”

“*producción cafetera por departamento en un mes dado*”

“*el índice de inflación en el transcurso del año (mes por mes)*”

en donde la totalidad de los escenarios se refieren a fenómenos científicos o de la vida real de dependencia en enunciados verbales: pero en ellos no se distinguen claramente los mundos que cambian ni lo que cambia (Sierpinska, 1992). Contrastan estas respuestas con las definiciones personales sobre el objeto función (García G., Serrano C., Espitia L., E 1997) dadas por alumnos de la básica secundaria, para quienes la idea intuitiva del objeto es de cambio y dependencia involucrada en fenómenos de la vida real y científica.

En general el tipo de asignación que convierte una relación en función se automatiza como técnica eficaz para caracterizar el concepto. Pero la técnica no es efectiva cuando la función se asume desde la perspectiva de herramienta disponible para la modelación de fenómenos de variación, relegando la comprensión a su carácter instrumental, lo que permite concluir que la restricción de la didáctica institucional tiene como efecto la pérdida de sentido del concepto para el profesor, pues existe una gran dificultad para articular los diferentes sistemas de representación. De esta dificultad surgen los errores de los profesores al no tener alternativas para proponer problemas que involucren el concepto, pues se bloquean en actividades más complicadas como la construcción de funciones.

Conocimiento profesional

En las preguntas referidas a los fines y objetivos para la enseñanza del concepto en la educación básica (preguntas 5, 6 7), cuatro de los profesores argumentan su importancia *“porque son parte del currículo”*. Los tres restantes aducen *su aplicabilidad en el mundo real*, sólo un profesor señala su importancia para el Cálculo. Las respuestas de los cuatro profesores son coherentes con la definición que proponen en cuanto que las situaciones identificadas como motivadoras de su enseñanza, sitúan la noción de relación como preconcepto, escenificada en ejemplos de la vida cotidiana *una fiesta, analizando las relaciones entre parejas; ...estableciendo relaciones entre los estudiantes y seleccionando las que vayan siendo funcionales...*. Los profesores (3) que adjudican su enseñanza a la utilidad del concepto, motivan su introducción a través de la noción de máquina, en el cual lo importante es *la transformación que sufre un dato cuando entra*.

Estas motivaciones son contradictorias con los errores adjudicados al manejo de la función por parte de los estudiantes:

*“se confunde la variable dependiente con la independiente;
el alumno se acostumbra a manejar variables x , y cuando se cambian estas variables por otras se bloquean;
el hallar el valor de la función con un número determinado, no les resulta fácil reemplazar el valor de la variable, sobre todo si toca elevar a alguna potencia o sumar o restar;
no reconocen la función idéntica o la constante”*

puesto que se adjudican invariantes relativas a las representaciones algebraicas.

Los fines propuesto para su enseñanza no son coherentes con los objetivos, sólo uno de los profesores señala como fin de la enseñanza, *formar ideas claras sobre la función como relación ideal*. En general están orientados por la importancia del contenido en el currículo. Los ejemplos de motivación dejan entrever una tendencia tecnológica de la educación matemática como la descrita por Carrillo y Contreras, (1995) puesto que el profesor identifica el contenido a enseñar, reproduce los procesos lógicos como

dinamizadores ideales del aprendizaje a través de ejemplos ingenuos de la vida real. Esta tendencia es coherente con el significado institucional de la didáctica, allí su sentido es simular un proceso inductivo de construcción, para mostrar invariantes lógicas de la funcionalidad y de su eventual reproductibilidad. De esta manera lo institucional mediatiza el funcionamiento de la didáctica, puesto que no se da al profesor la oportunidad de redescubrir la función, pues “no estuvo en ambientes de resolución de problemas en contexto” (Hitts , 1996, p.258). Las prácticas institucionales sólo buscan mostrar cómo la unicidad de la correspondencia modela el fenómeno, pero no se proponen desde la perspectiva de la modelación.

Lo didáctico para los maestros se presenta con la tendencia que reconoce que el alumno es el centro del aula, por eso la motivación se asume externa al estudiante, actuando a manera de estímulo para captar su atención. Esta tendencia, en boga en los años 80 y presente aún en algunas instituciones de formación docente, es también una posición institucional que mediatiza, así lo confirman 4 maestros pues cuando se les preguntó si tenían formación como profesores de matemáticas y cuáles eran los aportes de esta formación (preguntas 4, 5 y 6) todos afirman que si, adjudicándola *al paso por la Normal*¹. El papel fundamental del profesor es organizar estrategias expositivas atractivas *“les pido que digan palabras relacionadas con función tales como funcionamiento, funcionario, etc.. Acto seguido tratamos de identificar el sentido que tienen dichas palabras, ... a continuación se pregunta por la función de algunos elementos obteniendo respuestas triviales como: molino, moler ; batidora, batir; cobrador , cobrar; ... de esta forma se crea una primera idea de función”*, lo que muestra la coherencia con los significados institucionales de la didáctica. Los profesores que también tienen formación de Licenciados afirman *“que la licenciatura de matemáticas además de la parte teórica ayuda a estructurar y organizar procesos mentales que se reflejan en el quehacer diario, tanto a nivel personal como laboral”*. Es claro que los maestros comparten implícitamente el presupuesto institucional de transparencia entre el saber matemático y las matemáticas escolares.

Conclusiones

Las investigaciones realizadas sobre concepciones de los estudiantes sobre el concepto de función (Vinner 1983, Eisemberg, 1990), han mostrado que ellas son restringidas y podrían considerarse orientadas hacia una comprensión instrumental (Norman 1990). Pero desde un punto de vista empírico se afirma que no se tiene una comprensión completa de un concepto hasta que este no se enseña. Sinembargo, como afirma Norman, de tal aforismo podría concluirse que las investigaciones sobre profesores deben mostrar que su comprensión es relacional. Los resultados de este estudio comparados con los de Norman nos llevan a concluir que, a pesar de su experiencia profesional, no hay una aproximación a la comprensión relacional, es más de tipo instrumental puesto que se exhiben fijaciones como $R \rightarrow R$; no establecen traslaciones entre los diferentes sistemas de representación lo que imposibilita determinar la funcionalidad que no se enmarca en el uso eficaz de esta técnica.

¹ La Normal es un proceso de formación, en la Educación Básica Secundario, orientada a la formación pedagógica de tipo general, prepara los maestros para la Educación Básica Primaria.

En general, puede afirmarse que en términos de la comprensión, los resultados de este estudio coinciden con los encontrados por Norman: no existe coherencia entre la definición formal y la definición informal que proponen los profesores; muestran una fijación frecuente cuando interpretan funciones; identifican la funcionalidad en ejemplos estándares, pero en situaciones funcionales complejas no pueden identificarla; tienen serias dificultades para construir e identificar funciones en situaciones del mundo real.

La comprensión instrumental está estrechamente ligada a las invariantes didácticas que las prácticas institucionales muestran como determinantes para la comprensión del concepto. El significado personal, unido a prácticas institucionales no logran dotar de sentido a las prácticas didácticas ni al concepto.

Bibliografía:

- GARCIA G., SERRANO C., ESPITIA L. (1997). Concepciones de la noción de función en estudiantes de la básica secundaria. COLCIENCIAS, Universidad Pedagógica Nacional (en prensa).
- GODINO, J. D. y BATANERO, M.C. (1994) Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 14 (3) págs.325 - 355.
- EVEN, R. y MARKOVITS, Z. (1990) Teachers' Pedagogical Knowledge: The case of functions. Weizmann Institute. Israel 1990. *Educational Studies in Mathematics*. No. 21
- NORMAN, A. (1992). Teachers' Mathematical Knowledge of the concept of Function. The concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy. Dubinsky and Harel Editors. Purdue University..
- LLINARES, S. (1995) Conocimiento Profesional del Profesor de Matemáticas: Conocimiento, Creencias y Contexto en Relación a la Noción de Función. Conferencia invitada en el IV Encontro de Investigacao em Educacao Matemática.
- EL BOUAZZAOU, H. (1988) Conceptions des eleves et des professeurs a propos de la notion de continuité d'une fonction. Tesis de Doctorado. Universidad de Laval.
- RUIZ HIGUERAS, (1994) L. Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: Análisis Epistemológico y Didáctico. Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

CUADERNO DIDACTICO

E.

Que es?
A que es? VA
ninguno?

HACIA LA NOCIÓN DE FUNCIÓN COMO DEPENDENCIA Y PATRONES DE LA FUNCIÓN LINEAL

GLORIA GARCIA O, CELLY SERRANO, LUIS E. ESPITIA

COLCIENCIAS

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

1. Introducción

Este cuaderno didáctico presenta un acercamiento didáctico a las nociones de función y de función lineal en los niveles sexto y séptimo de la Educación Básica con base en un proceso de investigación realizado por los autores¹. Nuestra estrategia para abordar didácticamente esta aproximación estriba en el cambio de énfasis que la enseñanza hace de dichos conceptos, la aproximación al concepto de función se hace desde la dependencia, estrechamente ligada a las nociones de variación, variable y cambio. Las representaciones asociadas son las gráficas, tabulares y expresiones retóricas estableciendo con este tratamiento márgenes de aproximación a características invariantes del concepto, como son la unicidad de la correspondencia, la arbitrariedad de los conjuntos y de las reglas. Los escenarios de variación, permiten desarrollar el grado de conocimiento algebraico necesario para comprender el concepto y sus modelos.

Por su parte la Proporcionalidad directa como modelo de función lineal es abordada desde los diferentes procedimientos que subyacen en ella, – operador funcional – y las propiedades de linealidad, descritas en escenarios de movimiento y privilegiando las representaciones tabulares y gráficas.

Nuestro propósito al ofrecer a los educadores en matemáticas este cuaderno didáctico tiene la finalidad de ser un aporte susceptible de mejoras y cuestionamientos pues consideramos que el proceso de transformación y conocimiento que sufrimos los autores a lo largo del trabajo no es de carácter terminal, muy al contrario podemos afirmar que sólo es el inicio para consolidarnos como un grupo de estudio en la disciplina de la Didáctica de la Matemática.

¹La investigación “Una propuesta didáctica para la construcción de los conceptos de función, función lineal” desarrollada con el auspicio de Colciencias y la Universidad Pedagógica Nacional (1995-1997), se experimentó en el Instituto Pedagógico Nacional, en los grados sexto y séptimo de la Educación Básica.

1.1 Presupuestos del aprendizaje

Las investigaciones realizadas sobre el concepto de función (Vinner y Dreyfus 1983; Markovits, 1986; Janvier 1986; Sierpinska 1992; Cotret 1985; Sfard 1992; Dibisnky 1992) han identificado los diferentes sistemas de representación y los diferentes procesos cognitivos por los cuales transcurre la comprensión del concepto. Particularmente los estudios sobre la evolución conceptual del concepto han redescubierto elementos que han estado presentes en su evolución y que están relacionados con las estrategias y modos de comprensión de los estudiantes.

Estas distintas investigaciones han determinado que las representaciones asociadas al concepto ponen de relieve diferentes aspectos, así como distintos objetos que le subyacen. Así por ejemplo cuando el concepto se asocia con la noción de transformación, se pone de relieve las relaciones entre dominio e imagen, puesto que centra la atención en el estado inicial y final, de aquí que didácticamente se construya una representación como la máquina para mostrar ostensivamente tal invariante. La noción de función como clase especial de relación, se asocia con la invariante unicidad de correspondencia, en consecuencia la representación asociada, diagrama sagital es de carácter estático. Por su parte cuando la noción se asocia con la idea de dependencia entre variables, las invariantes descritas son poco relevantes, pues lo que interesa es expresar fenómenos de cambio, modelar variaciones entre variables. De esta manera el privilegio de un único sistema de representación crea significaciones restringidas del concepto, y oculta la riqueza y complejidad de su noción como objeto matemático.

Como resultado de estas investigaciones se han caracterizado dos perspectivas para analizar la comprensión del concepto la perspectiva proceso y la perspectiva objeto. En la primera se considera que la función conecta los valores de x y y , es decir para cada valor de x , le corresponde un y . Desde la perspectiva objeto la función se asume global, definida dentro de una teoría.

Desde otra enfoque Sierpinska (1992), propone una teoría de la comprensión para el concepto de función y describe como operaciones mentales cuatro actos: de comprensión: identificación, discriminación, generalización y síntesis. Estos están supeditados a los contextos (matemático o matematizado) pues son los que lo dotan de significados y al mismo tiempo privilegian invariantes del mismo (1992, p. 29). Sierpinska propone como condiciones para la comprensión de la noción función crear la consciencia de existencia de los mundos que cambian, de los procesos que dan lugar al cambio, de la identificación de las regularidades por las que se produce el cambio, y crear la consciencia de la asimetría entre los mundos que cambian (variable dependiente e independiente).

Partiendo de asumir esta propuesta y atendiendo a la hipótesis de iniciar la construcción para **el grado sexto de la Básica Secundaria** de el significado de la noción de función como expresión de dependencia entre variables (siempre referida a dos variables) nos interesa el aspecto semántico de la dependencia expresada en representaciones gráficas, tabulares y verbales como expresiones de fenómenos de variación y cambio y orientar su

comprensión hacia la perspectiva proceso.

1.2 Aspectos matemáticos de la noción de función como dependencia

En la evolución del concepto encontramos que su surgimiento se dio asociado al estudio de la variación de manera cualitativa, el cual se convirtió en soporte fundamental del concepto “prácticamente durante todo el trabajo de los siguientes doscientos años”. (Kline M., 1979, p. 446). Pero su evolución como concepto se dio asociado al estudio del cambio, en particular del movimiento manera cualitativa, el cual se convirtió en soporte fundamental de su desarrollo “prácticamente durante todo el trabajo de los siguientes doscientos años” (Kline M., 1979, p. 446). El estudio del cambio, se inicia con la representación gráfica- geométrica, construida por Nicolás Oresme (s. XIV) como método para representar las cualidades cambiantes de los objetos. Oresmes utiliza la continuidad de los segmentos para expresar la relación de variabilidad entre cantidades variables, pues no se disponía de un continuo numérico para representar el movimiento, de esta forma, las gráficas se consideraron modelos geométricos de las relaciones funcionales. Con la teoría de las Latitudes, Oresme elabora una teoría pura comprobable, exenta de experiencias, pues se abstrae la forma o las cualidades concretas de los problemas.

Para Youschkevitch (1976) esta teoría estaba basada “en el uso consciente de ideas generales acerca de las cantidades variables dependientes e independientes” (1976, p.17) pues cada de las cantidades involucradas, latitud y longitud, se “interpretaban de manera general pero dependiente de su longitud”, en la representación gráfica las dos cantidades corresponden a lo que en el lenguaje moderno se denomina ordenada y abscisa.

Galileo introdujo lo numérico en las representaciones gráficas e hizo una interpretación de la teoría para expresar las leyes del movimiento, a la que le incorporó el lenguaje de la Teoría de las Proporciones, dando un sentido de variación directa o indirectamente proporcional. Este lenguaje junto con la teoría matemática de la época encubrió aspectos de la variación continua, pues solo se consideraban ciertos valores para las variables debido a la ruptura que se tenía entonces, sobre números y magnitudes y al problema de la inconmensurabilidad. Es así como las representaciones gráficas aún siendo cualitativas, o los enunciados verbales en términos cinemáticos se convirtieron en la forma de introducir las funciones.

Con los trabajos de Descartes y Fermat (XVII) sobre las curvas se introduce por primera vez la idea de que una ecuación en x y y es un medio para expresar la dependencia entre dos cantidades variables. Surge así la primera concepción de función asociada a lo analítico-geométrico. Este aporte en el contexto del desarrollo de la matemática, relacionar dos ramas Geometría y Álgebra, busca establecer métodos de expresión de relaciones numéricas entre propiedades de objetos geométricos. Con el apoyo en el desarrollo del Álgebra, introducción de signos, para las operaciones, utilización de letras para representar cantidades desconocidas y letras para las constantes, junto con los

progresos alcanzados en la extensión del concepto de número aparición de los imaginarios, la dependencia entre variables comienza a ser reconocida como una relación que se expresa por medio de expresiones analíticas, al reconocer que una *ecuación entre x e y expresa la dependencia entre ambas*, Descartes y Fermat introducen el método analítico para la representación de las funciones en ecuaciones algebraicas, asociadas a las curvas geométricas, las curvas cuya naturaleza no era geométrica las denominó mecánicas (Youschkevitch, 1976).

Para Youschkevitch, fue este método el que revolucionó el desarrollo de la matemática (1976, p. 28), pues el uso de las expresiones analíticas en las cuales las operaciones se efectúan siguiendo reglas estrictamente específicas aportó al estudio de la función y se amplió al cálculo infinitesimal, lo que determinó que el pensamiento funcional pasará a predominar en el trabajo matemático, pero siempre expresadas algebraicamente.

Con los trabajos de Newton (s. XVI) se hizo posible representar analíticamente cualquier relación funcional. Newton al resolver problemas del movimiento asociando ideas físicas y matemáticas introduce el método de representar en series infinitas de potencias infinitas, al que denominó Método de fluxiones y de las series infinitas (1670), pero las ideas principales eran expresadas en términos mecánicos y plantea de esta manera los dos problemas fundamentales del cálculo infinitesimal, la diferenciación y la integración. Para Newton el movimiento está caracterizado por la velocidad, en el movimiento la variable independiente (fluyente) es una cantidad correlacionada (quantitas correlata) a la cantidad dependiente (relata).

Leibniz (s. XVII) introduce por primera vez el término función asociándolo a las representaciones geométricas, pero separándolo de la variación de magnitudes físicas al caracterizarlo como: "ciertas longitudes tales como abscisas, ordenadas tangentes, normales, etc., asociadas con la posición de un punto en una curva" (Leibniz, Langrange, Euler y Bernoulli). En el s. XVII aparece el término función. Sin embargo el vocablo función sigue ligado a lo geométrico, segmentos en general, lo que seguía preocupando porque no indicaba de manera general "cantidades arbitrarias dependientes de alguna variable" (p. 35). Con base en estos argumentos Bernoulli intenta generalizar la noción al formular la siguiente definición "llamamos función a las diversas cantidades dadas de alguna forma por una (cantidad) indeterminada x y y y por constantes ya sea algebraicamente o trascendentemente" (Bernoulli citado por Youschkevitch, 1976, p. 36), esta se convierte en la primera definición de función como expresión analítica. Bernoulli propone también las notaciones φ y $f(x)$ para distinguir la característica de una función y para escribir el argumento.

Con este avance y con el desprendimiento paulatino de los conceptos del Cálculo de lo geométrico, lo mecánico se da lugar a iniciar el estudio del análisis matemático como una disciplina científica autónoma. En este marco es Euler (s. XVII) quien continúa el camino de precisar la noción de función, comenzando a definir nociones iniciales como son constante y cantidad variable. La primera la define como "Una cantidad variable es una cantidad indeterminada, o universal que comprende en sí misma a absolutamente todos

los valores determinados” con esta definición, la cantidad variable comprende todos los números tanto positivos, como fraccionarios, racionales, irracionales y trascendentales.

Con estas aclaraciones entra a definir la noción cambiando el término cantidad, propuesto en la definición de Bernoulli por el de expresión analítica “La función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de esa cantidad variable y de números o cantidades constantes” (Euler citado por Youschkevitch, 1976, p. 42). Y entra a precisar qué se debe entender por expresión analítica, la que determina como serie infinita de potencias $A + Bz + Cz^2 + Dz^3$, pero no llega a determinar claramente si abarca las funciones trascendentes, o las obtenidas en el Cálculo Integral. De esta forma, la definición de función como expresión analítica fue aceptada por los matemáticos de la época.

El largo proceso de abstracción (3.700 años, aproximadamente) donde se suceden una tras otras las invariantes, representaciones (gráficas, simbólicas) que van perfilando la abstracción y el nivel de generalización que comporta la definición moderna ha eliminado la idea de variación, para poner de relieve caracterizaciones más generales y precisas del concepto, este proceso permite inferir presupuestos para convertir el concepto en objeto de enseñanza. La pregunta que surge, ¿es cuál de las versiones (con sus representaciones e invariantes) le sirven a las matemáticas escolares, como objeto de enseñanza y de aprendizaje?

La respuesta a este interrogante orienta la organización didácticamente del diseño al tener en cuenta:

- Fines que persiga la institución escolar (Educación Básica donde se realiza la experiencia).
- Preparación para el desempeño técnico o profesional (Álgebra, Cálculo) o preparación para la formación científica (utilización de conocimientos matemáticos de alto nivel de complejidad).
- Una Concepción sobre la naturaleza de las matemáticas como actividad humana y producto de la construcción social
- Organización cognitivamente coherente de los contenidos.

Son pues estas las perspectivas las que nos permiten plantear una modificación en la enseñanza del concepto de función en la educación obligatoria y de ellas también se derivan los principios para constituir vías de acceso al concepto, pues este no queda definido ni regulado por un tiempo prefijado como terminal, – nivel séptimo y/o octavo grado – , sino se constituye en un proceso longitudinal.

1.3 Situaciones didácticas

Como consecuencia de los estudios preliminares realizados, el diseño de las situaciones subraya la interacción entre las características de la tarea y el tipo de representaciones

asociadas al concepto. En esta perspectiva, se considera necesario incluir diferentes sistemas de representación de la noción función para lograr la comprensión. La priorización del lenguaje gráfico cobra significación en especial las gráficas cartesianas, como su tratamiento cualitativo, no solo debido a las características de las invariantes de la noción de función como dependencia, sino también por su significación como medios de comunicación de información en el mundo actual.

Pero este lenguaje exige un aprendizaje previo por cuanto comporta una transformación entre la realidad y lo que representa, el cual está sujeto al simbolismo y a las convenciones propias de su lógica particular. Así por ejemplo el sentido de la distribución de puntos en los cuadrantes, el sentido de aumento o disminución, la variación de una magnitud dentro de un rango de valores, las variables que relaciona conforman la lógica propia de este sistema de representación por lo que se hace necesario que los estudiantes adquieran con anterioridad este sistema de representación como expresión de relaciones entre variables. Sólo a partir de este aprendizaje logra tener sentido hacer de las gráficas el intermediario didáctico para aproximar a los estudiantes a una comprensión de la noción de función desde la perspectiva de proceso. En consideración a esta situación se introduce una situación preliminar para acercar al estudiante a la comprensión de este lenguaje.

Igualmente la tabla como sistema de representación convencional de relaciones entre variables, como objetos permiten estudiar la variación y su efecto el cambio son replanteadas en términos de presentarlas como intermediaria didáctica dinámica de procesos aritméticos que permiten comprender y anticipar las nociones de variable y el estudio de reglas de variación que pueden ser expresadas en fórmulas o retóricamente.

Las situaciones diseñadas teniendo en cuenta el nivel de los estudiantes, restringen el uso de las gráficas al primer cuadrante, los números de las tablas corresponden a los números naturales. Pero las gráficas de funciones incluyen tanto funciones continuas como discretas, así como diversos modelos de función.

Nos acogemos a la propuesta de Brosseau (1982b) para designar el conjunto de relaciones que se establecen explícita o implícitamente entre los alumnos o alumno y un cierto medio, con la finalidad de que los alumnos aprendan un saber como situaciones didácticas. El medio está constituido por el conjunto de problemas que dotan a la noción de función del sentido de dependencia. Las relaciones son las negociaciones cargadas de intencionalidad entre maestro y alumno- alumnos para lograr la comprensión de la noción. La intención de presentar a la comunidad estas situaciones es averiguar cómo funcionan en los contextos cuáles características resultan determinantes para su éxito y cuáles para su fracaso. Para elaborar este análisis siguiendo a Brosseau se clasifican en las siguientes fases:

- a. Situación de acción: se caracteriza porque el estudiante interactúa con la tarea desde los conocimientos que posee.
- b. Situaciones de formulación y validación: en la primera, los estudiantes comunican la

información a otros alumnos, modificando su lenguaje habitual, introduciendo elementos más precisos del dominio de contenido matemático. La formulación es también la comunicación de la información pero para convencer la validez de afirmaciones, se explica y se elaboran las correspondientes pruebas.

- c. Las situaciones de institucionalización establecen las convenciones sociales, se realiza con la participación del profesor.

Para lograr que las situaciones didácticas cumplan estos propósitos se han definido características de la misma situación.

Introducción a gráficas como expresiones entre variables

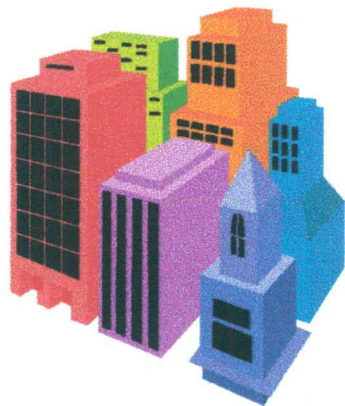
<u>Objetivos del problema :</u>	<u>Objetos de estudio</u>	<u>Las competencias:</u>
• Instaurar el estudio de los gráficos como sistema de representaciones matemáticas que codifica aspectos relevantes de la variación • Dar a los estudiantes herramientas para la interpretación aproximada de gráficos • Introducir la noción de variación	Gráfico, Análisis de variación de magnitudes asociadas, ubicación de puntos incrementos de decrecimientos, según el lugar que ocupan los puntos en relación a la lejanía o cercanía del punto ceros de los ejes , o entre si Prealgebraico la información verbal tipo retórica se constituye en la fuente para relacionar variaciones de cada variable.	Las competencias que se suponen tienen los estudiantes, son las adquiridas socialmente a través de la lectura de información social y deportiva de gráficos, y que le permiten al estudiante intuitivamente: • identificar magnitudes que intervienen • Leer valores cualitativos correspondientes a las abscisas y ordenadas de cada uno de los puntos <u>Las que se esperan adquieran los estudiantes son:</u> • Identificar la variación dentro de cada una de las magnitudes • Comparar cualitativamente valores de una magnitud • Identificar información dada a través de puntos • Localizar puntos en un cuadrante utilizando información gráfica o escrita • Trasladar información entre cuadros, gráficos y verbales, para obtener nueva información

		La competencia que <i>debe estar disponible</i> y que según el caso se pueden convertir en ayudas u obstáculo son: Resolución de situaciones problemas como aspecto introductorio en la construcción de ideas matemáticas
--	--	---

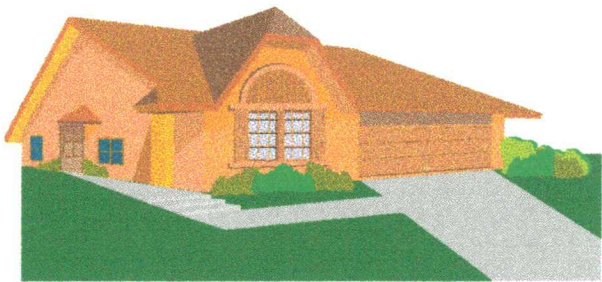
Las situaciones didácticas que conforman este bloque son:

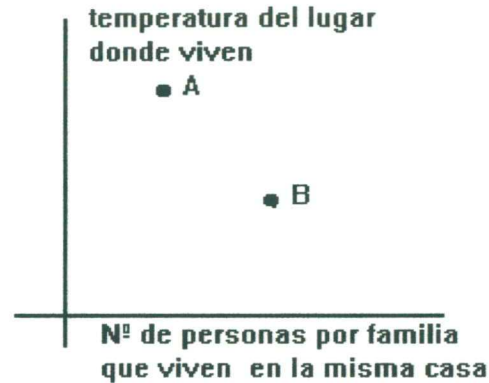
1. Alvaro y Beatriz se conocieron durante las vacaciones de Diciembre y se hicieron amigos. ¿Quiénes son?, ¿Donde viven?, ¿Cómo son sus familias?, son preguntas que se pueden contestar al leer la información presentada en las siguientes fotos y diagramas. La siguiente gráfica informa sobre algunas características del lugar donde viven Alvaro y Beatriz. Analícela y conteste las preguntas

Alvaro



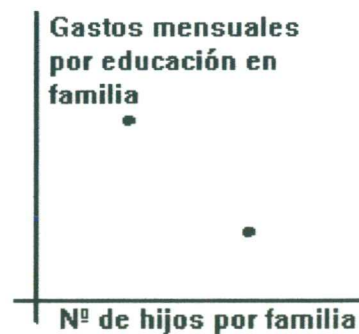
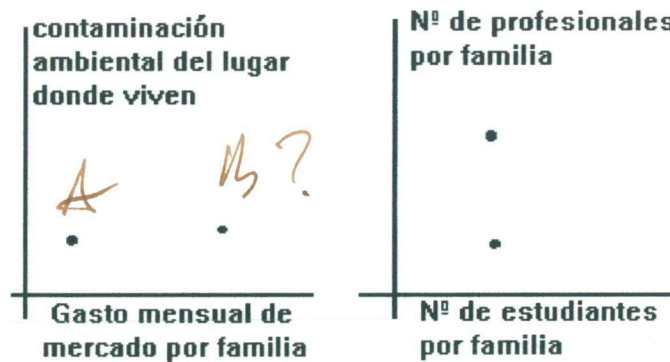
Beatriz





- ¿Viven en ciudades diferentes?
- ¿Quién vive en clima caliente?
- ¿Tiene Beatriz más hermanos que Alvaro?
- ¿Cómo es la casa de cada uno?
- ¿Cuál de las familias gastará más en Educación?
- ¿Son Beatriz y Alvaro estudiantes?

Es posible que algunas de las preguntas anteriores no tengan aún respuesta. A continuación se presentan otros gráficos con los cuales se puede obtener información.

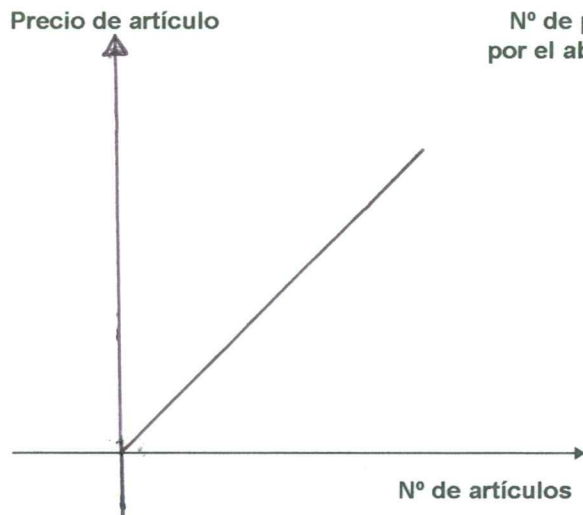


- ¿Es Alvaro un profesional?
- ¿En qué se parecen las ciudades en que viven Alvaro y Beatriz?

- ¿En cuál de las familias hay menos estudiantes?
- ¿A cuál de estas familias se parece su familia?
- ¿Es cierto que Beatriz es hija única?
- ¿En caso de que le propusieran visitar a Alvaro y a Beatriz, ¿a cuál visitaría?
- ¿Serán profesionales los abuelos de Beatriz?

2.. Invente situaciones que representen cada una de las siguientes gráficas:

Gráfica 1



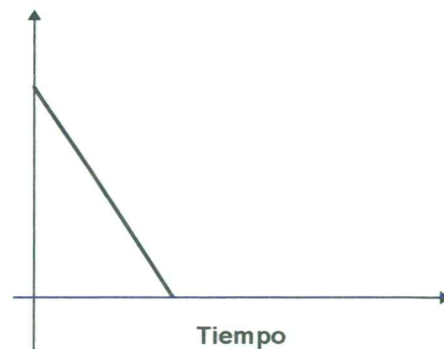
Gráfica 2



Gráfica 3



Gráfica 4



2. En la Gráfica 1

.. En la Gráfica 1

- a). Si Ana compra cierta cantidad de artículos y José compra otra cierta cantidad, pero Ana paga menos que José ¿Qué puedes afirmar del número de artículos comprados Ana y José ?
- b). En la gráfica identifica ¿qué sucede cuando Pedro compra más artículos que Carlos?.

En la gráfica 2

- a) ¿Qué puede deducir del contagio del “abrazo del pato”?.

En la gráfica 3

Se puede afirmar:

- b) ¿Qué el salario mensual aumenta o disminuye?. Explique su respuesta.
¿Según la gráfica el salario devengado depende del mes que se paga?. ¿Por qué?. Explique su respuesta.

En la gráfica 4

- a. ¿Si aumenta el tiempo qué le sucede a la altura?. Explique su respuesta.
- b. ¿El cambio en la altura depende del cambio del tiempo?.

3. De las gráficas 1, 2, 3, y 4

De que depende:

- ¿El costo de los artículos?.
- ¿El número de personas contagiadas por el “abrazo del pato”?

Hacia la noción de función como Dependencia

Objetos de estudio: En el cuadro numérico la completación e interpretación de tablas para desarrollar procesos aritméticos sirve de contexto para el estudio de la variación y la dependencia. Para resolver las preguntas formuladas es necesario conjeturar sobre valores que toman las cantidades descritas en las tablas al comparar variaciones entre

cantidades.

En el cuadro gráfico: la situación aborda la representación de la dependencia entre cantidades de manera cualitativa y cuantitativamente y evidencia cómo la representación de cantidades numéricas – que aumentan o disminuyen – constituyen la gráfica de dependencia funcional. La relación entre uno y otro cuadro se encuentra determinada por la formulación de preguntas que para responderlas se requiere de trabajar entre cuadros con el fin de poder dar la solución. La selección de diferentes tipos de gráficas (lineal, parábola, por segmentos) constituye un elemento determinante para la construcción de tipos de variación.

En el cuadro prealgebraico: el establecimiento de dependencias entre cantidades enunciadas oral y por escrito anticipa la formulación sintáctica algebraica.

Objetivos del problema:

- Usar las tablas para analizar situaciones funcionales numéricamente
- Anticipar a través de procesos aritméticos variacionales la noción de variable.
- Identificar la dependencia tanto en representantes tabulares como gráficas.

Las competencias:

Las competencias *que supuestamente deben tener los estudiantes* para abordar el problemas son:

- En el cuadro numérico: Calcular los valores de variación de las cantidades relacionadas
- Interpretar variaciones de cantidades en la tabla y en la gráfica

En el cuadro gráfico:

- Interpretar de manera global variaciones cualitativamente.

En el cuadro prealgebraico:

- Enunciar de manera oral, dependencias entre cantidades.

Las competencias *que deben estar disponibles* y que según el caso se pueden convertir en ayudas u obstáculos son:

- Resolución de situaciones problemas como aspecto introductorio a la construcción de nociones matemáticas
- Procesos aritméticos para resolver problemas numéricamente.
- Interpretación de gráficas.

Las competencias *que se esperan los estudiantes adquieran* son:

Conjeturar sobre hechos globales como es el cambio de la temperatura, sin establecimiento de medición puntual y exacta de la misma.

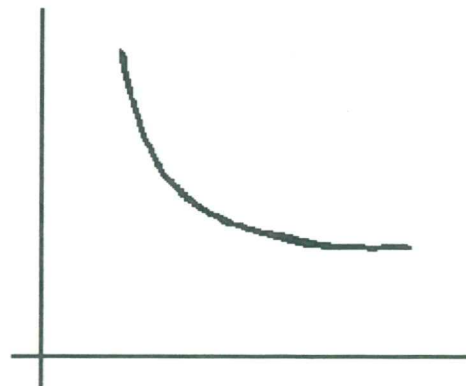
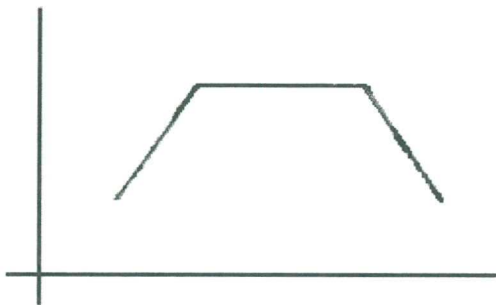
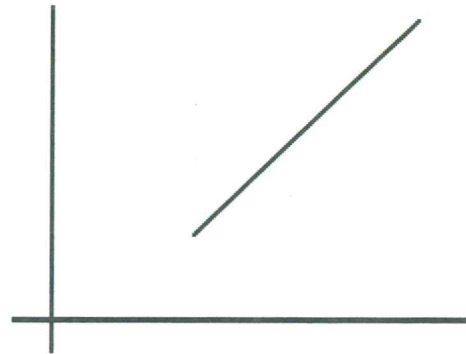
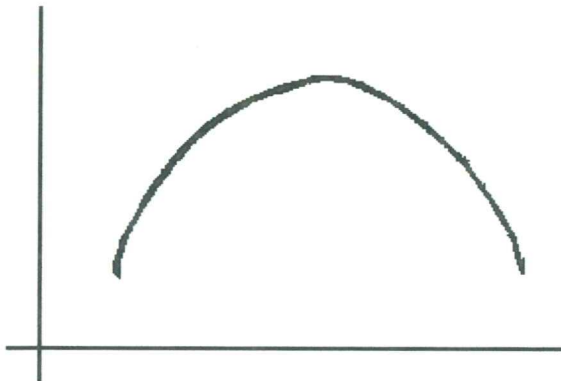
Relacionar representaciones tabulares y gráficas con la representación de la dependencia.

Enunciar por escrito la dependencia entre las cantidades representadas y formulen generalizaciones de las mismas

1. La siguiente tabla relaciona la forma cómo varía la temperatura el día en Bogotá

Hora	t °C
6 a.m.	5
8 a.m.	
4 p.m.	7
6 p.m.	

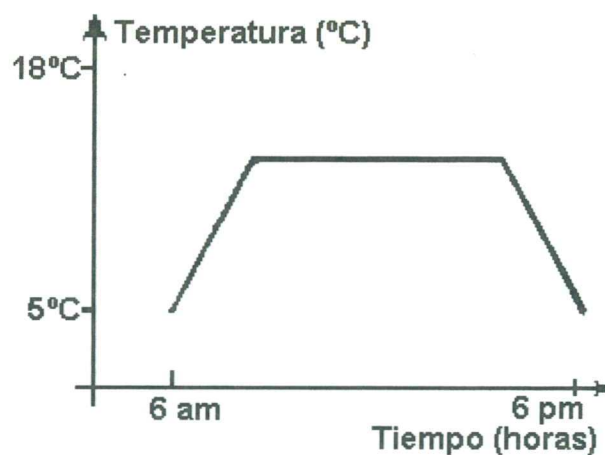
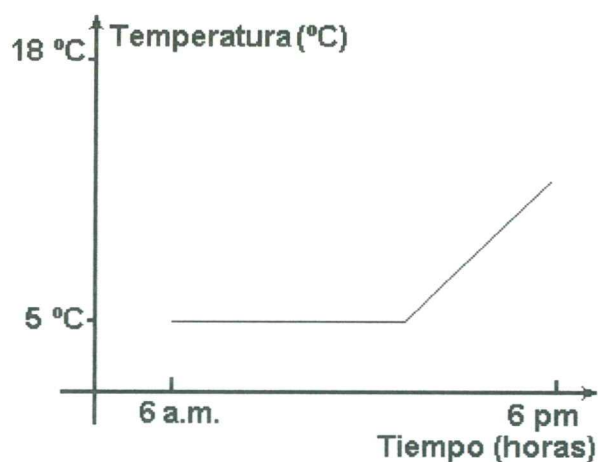
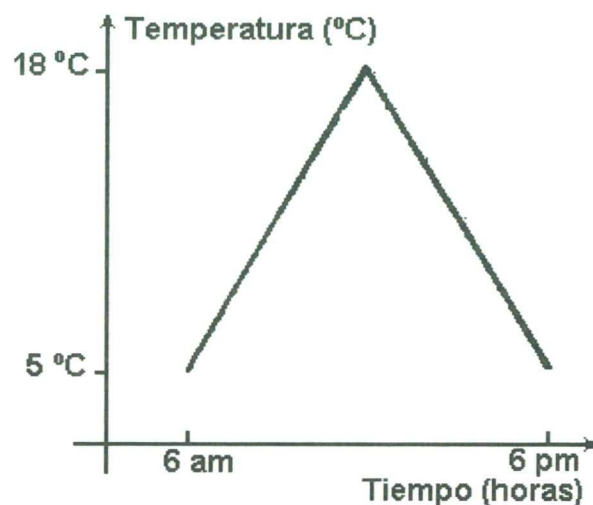
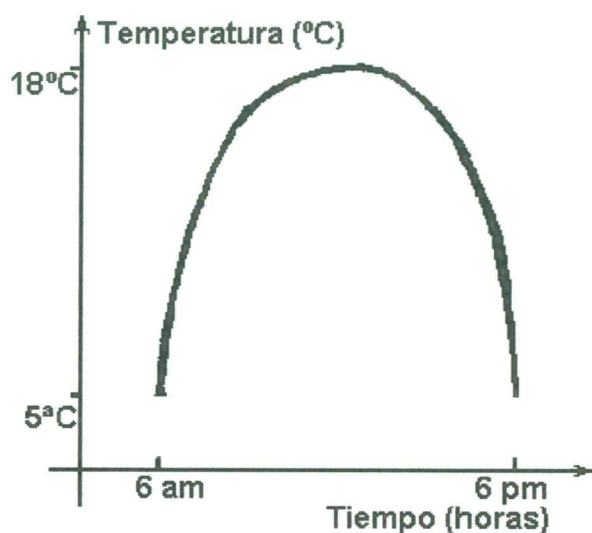
- Entre las 8 a.m. y las 12 m. la temperatura ¿aumentará o disminuirá ?. Explique
- ¿En qué horas la temperatura alcanza su máximo valor?
- Identifique en las siguientes gráficas ¿cuál de ellas representa mejor la respuesta de la b?



- Complete la tabla colocando posibles temperaturas para cada dos horas.
- ¿Entre qué valores varía la temperatura y entre qué valores el tiempo?
- ¿A medida que avanza la mañana qué le sucede a la temperatura?
- ¿A medida que transcurre la tarde, qué le ocurre a la temperatura?

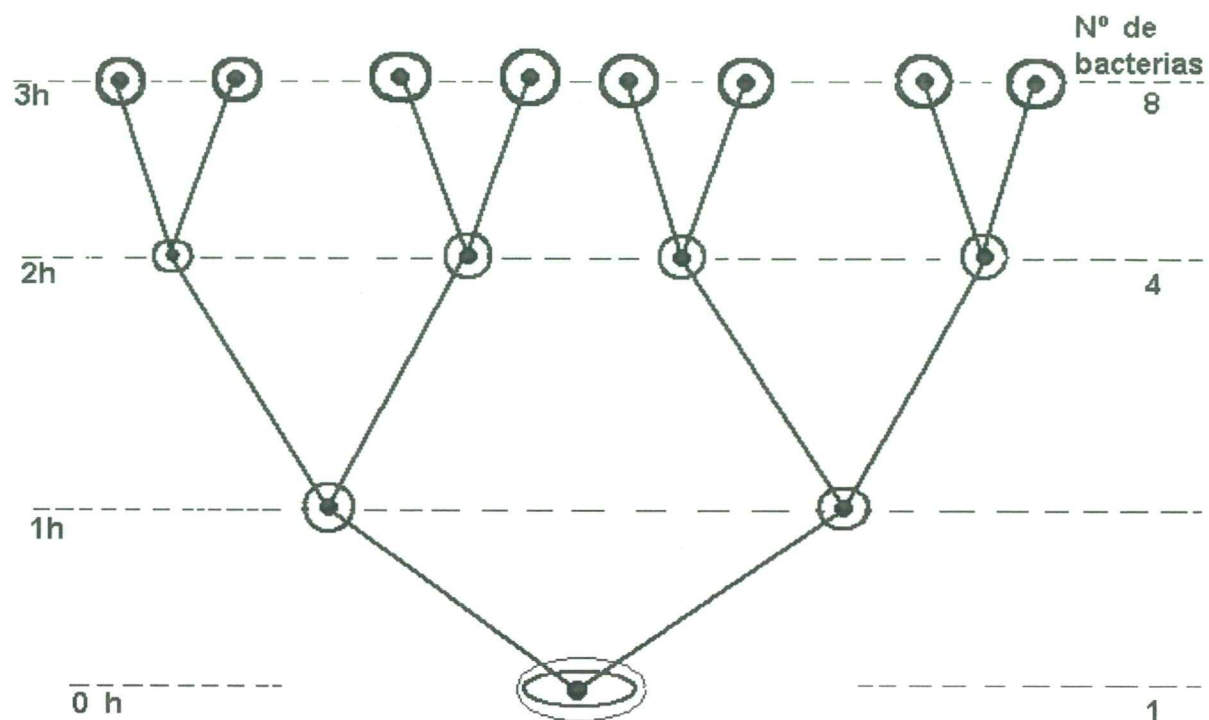
2. Identifique en las siguientes gráficas ¿cuál representa la variación de la temperatura a

lo largo de 1 día en Santafé de Bogotá ?



3. Elabore una gráfica que represente la variación de la temperatura. en un día en la ciudad de Cartagena de Indias.

4. A una cierta temperatura una bacteria de cólera se reproduce según el siguiente esquema:



- En el diagrama represente cuántas bacterias se han reproducido a las seis horas.
- ¿Entre la primera y la tercera hora se aumenta o disminuye el número de bacterias? .c.
- ¿Entre la segunda y la cuarta hora se aumenta o se disminuye el número de bacterias?
- Transcurridas 24 horas qué se puede afirmar del número de bacterias reproducidas.
- ¿De qué depende la reproducción d e la bacteria del cólera?

II. Una aproximación a la función lineal: patrones

II.1 Referentes conceptuales de la propuesta

Proponemos el estudio de la función lineal como modelo conceptual que sintetiza y matematiza la noción utilitaria de proporcionalidad. Nos interesa caracterizar la función de proporcionalidad directa a partir de reconocer primero, que es un modelo de función que evoluciona linealmente, en el sentido de que para diferencias constantes en y le corresponden diferencias constantes en x . Segundo, que si bien es una función creciente, su crecimiento se caracteriza porque cuando se dobla (o se reduce a la mitad, o se multiplica por n) una de las variables, los valores de la otra se doblan, (o se reducen a la mitad o se multiplican por n). Tercero, porque si se suman dos valores de la variable independiente, el correspondiente valor de la variable dependiente es la suma de los valores que corresponden a los dos valores iniciales.

Con este propósito hemos revisado los estudios realizados por H. Freudenthal (1983); G., Vergnaud (1983, 1991); M.L.Fiol, J. Fortuny (1990); C. Azcarate, J. Deulofeu (1990); como estudios que nos permiten articular la hipótesis. Como un primer aspecto para describir el porqué de nuestra propuesta, puntualizamos qué se entiende por modelo y sus implicaciones didácticas.

En el rango epistemológico, un modelo es un constructo teórico que representa de manera abstracta o formal relaciones y propiedades invariantes de un dominio de indagación a través de símbolos. Con el modelo se obtiene una exposición sistemática a la vez que una síntesis, pues unifica “cosas”, fenómenos, que han seguido desarrollos distintos, al mismo tiempo que establece marcos conceptuales sistemáticos para ordenar hechos y fenómenos dando lugar a las teorías.

Desde el punto de vista matemático “un modelo es cualquier sistema completo y compatible de ecuaciones matemáticas diseñadas para que se correspondan con alguna otra entidad, su prototipo” (Aris citado por Davis y Hersh, 1980, p. 61). El prototipo puede ser una entidad de las ciencias, física, biológica, química, social, y aún de la psicología. Puesto que el modelo es una aproximación conveniente a un estado de cosas, es una construcción provisional y por consiguiente pueden cambiar o ser modificado. La construcción de un modelo puede realizarse a partir de un modelo generatriz el cual puede conservar invariantes las relaciones y la estructura nucleadora del modelo y al mismo tiempo que ampliarlas.

En general, puede afirmarse que el modelo matemático se asume como una representación de la realidad sobre el que se crea un sistema conceptual, que a su vez se convierte en un sistema teórico para interpretar la realidad. Desde esta propuesta las matemáticas se asumen como modelos “teóricos por los cuales se describe, se organiza y se estructura la realidad” (Rico, 1985, p.45). De esta forma los modelos matemáticos se conciben como herramientas intelectuales, instrumentos cognitivos, como la llama Freudenthal (1983), para matematizar partes de la realidad, la acción de matematizar se denomina modelización (Rico, 1995).

Por su parte, en la Educación Matemática, el concepto de modelo viene siendo utilizado para determinar nuevas directrices para las matemáticas escolares, para orientar la didáctica y para analizar los procesos cognitivos de los estudiantes cuando aprenden matemáticas, lo que hace indispensable diferenciar tanto sus significados como los campos donde se utiliza el término.

Las consecuencias que se desprenden para la didáctica es partir de situaciones matematizables (de la misma matemática o de otras ciencias) organizando la variedad de fenómenos y situaciones de la vida científica y social donde los conceptos y las estructuras matemáticas toman sentido, pues es en los contextos de donde surgen los conceptos.

A Modelo conceptual

En el estudio de la cognición matemática, surge el significado de modelo conceptual para estudiar los fenómenos de comprensión y aprendizaje de las matemáticas de manera general. Lesh y Col, (citados por Castro 1994) lo definen en los siguientes términos: “Es una estructura en continuo cambio compuesta de :

- Una red interconceptual de relaciones y operaciones, que el sujeto debe coordinar para hacer juicios relativos a un concepto.
- Sistemas que ligan y/o combinan redes interconceptuales de varios conceptos.
- Sistemas de representación (simbólico, dibujos, materiales concretos) translaciones y transformaciones dentro de los distintos modos de representación.
- Sistemas de modelización de procesos, o sea, mecanismos dinámicos que permiten utilizar las componentes anteriores para modificarlas o adaptarlas y para encajar las situaciones reales” (p.15).

Se concluye entonces que con esta definición se hace ruptura de tradiciones vigentes como son: la enseñanza de dominios compartamentalizados y presentados de manera terminal y modelos de evaluación aún presentes en

nuestra escuela en los cuales se establece que es el dominio de una técnica a la repetición de la definición, los que garantizan que los estudiantes han aprendido.

La comprensión en sí misma es “un proceso complejo que *evoluciona gradualmente*” (Castro, 1994, p. 17) puesto que depende de la construcción de redes conceptuales y procedimentales interconectadas con sistemas de representaciones asociadas. La evolución gradual permite identificar comprensiones locales, las cuales se encuentran en vía de transición y transformación.

Si bien esta definición de modelo cognitivo es formulada de manera general, se soporta sobre la especificidad de los conceptos matemáticos, y de sus conexiones, lo que implica que es a partir de la especificidad de dominios de contenido matemático como se puede caracterizar un modelo conceptual.

Para precisar mejor las relaciones entre el conocimiento matemático específico y sus formas de pensamiento, G. Vergnaud (1983) propone el campo conceptual para abordar con rigurosidad las estrechas interdependencias entre el dominio específico y las realizaciones del sujeto. Para Vergnaud, la teoría de los campos conceptuales, “es una teoría cognoscitiva para proporcionar un marco coherente y algunos principios de base para el estudio de competencias complejas, especialmente aquellas que utilizan la ciencia y la técnica” (1990, p. 133), lo que permite generar una clasificación de las tareas cognoscitivas y de los procedimientos que pone en juego un sujeto cuando soluciona tareas. Los campos conceptuales se elaboran con base en la contrastación de lo conceptual estándar frente al modo en que el sujeto concreto estructura y organiza los procedimientos constituyentes de la noción o concepto matemático. Su intención es también ofrecer un marco de aprendizaje que rupturó la tradicional creencia de la enseñanza de las matemáticas: la definición de un concepto es única y por consiguiente su aprendizaje tiene el carácter de terminal. La noción de campo conceptual complejiza esta creencia pues encierra un “conjunto y situaciones para cuyo tratamiento resulta necesario utilizar variedad procedimientos y representaciones de *diferentes tipos estrechamente interconectados*” (1983, p. 129, la traducción es nuestra).

Con este modelo ha estudiado campos conceptuales como la estructura aditiva, relaciones numérico-espaciales y la estructura multiplicativa¹. Específicamente el campo de la estructuras multiplicativas se caracteriza por las situaciones problemas que involucran una relación cuaternaria entre cantidades y que se

¹ Para una ompliación puede consultarse a G Vernaug “ Multiplicative Structures” en Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. ACADEMIC PRESS. New York, 1983

resuelven con la multiplicación y la división. El análisis de la estructura que subyace a estos problemas le permite clasificarlos en problemas de isomorfismo de medida (proporción simple) producto de medida, y proporción múltiple. El isomorfismo de medidas es una relación cuaternaria entre cuatro cantidades, en las cuales dos son *medidas* del mismo tipo y el resto son de otro tipo. El enunciado siguiente es un ejemplo de esta estructura:

Tengo 5 cajas de yogur. Hay 6 yogures en cada caja ¿ Cuántos yogures tengo ?

El enunciado define una relación de correspondencia de tipo:

Cajas	Yogures
1	6
5	x

Los números 1 y 5 son medidas que representan cantidades de paquetes, los números 6 y x son también medidas de otra naturaleza, representan cantidades de yogures. Las relaciones entre estas medidas son:

Cajas	Yogures
1	6
5	x

El operador vertical $\times 5$ es un operador escalar, sin dimensiones; el operador $\times 6$ es un operador funcional, representa el paso de una categoría de medidas a otra, yogures / cajas

Vergnaud (1991) propone también analizar las relaciones desde las proporciones, teniendo en cuenta que son ecuaciones de dimensiones:

$$\frac{xyogures}{4yogures} = \frac{3paquetes}{1paquete} \text{ que es equivalente a: } \frac{x}{1} \text{ yogures} = \frac{3 \times 4yogures}{1}$$

otra expresión equivalente es

$$\frac{xyogures}{3paquetes} = \frac{4yogures}{1paquete} \text{ y su equivalente: } \underline{x} \text{ yogures} = \underline{3} \times \underline{4} \text{ yogures}$$

La característica esencial de estos problemas es que en ellos se puede realizar una análisis vertical, con herramientas como el operador escalar, es decir cuando se mueve en una mismo espacio de medida o con un operador función $\underline{f}$, cambiando el espacio de medida, el cual corresponde a la noción de función lineal.

La existencia de estas herramientas conlleva a reconocer procedimientos distintos para iniciar el estudio de la función lineal. La característica de este operador es el estudio de la variación entre variables dependientes, lo que dará lugar a comprender las características de su regla y su gráfica, puesto que la existencia del operador multiplicativo establece la forma del cambio entre una variable a otra.

II.2 Aspectos matemáticos

Tradicionalmente la enseñanza del concepto de función y en particular los textos escolares y universitarios, presentan a la función lineal indentificando sus características algebraicas $\underline{[f(x) = mx + b]}$, $\underline{y = K \cdot x}$ o definiéndola por su gráfica, recta. En estas presentaciones “el proceso de generalización de la regla como idea esencial de la función” (Cotret S. R., 1991), ha desaparecido y por tanto se excluye la caracterización del tipo de variación en estas dependencias.

De otro lado, parecería que existen muchas definiciones para este tipo de función. Algunos a las funciones del tipo $\underline{[f(x) = mx + b]}$ las denominan funciones afines o lineales, a las funciones de tipo $\underline{y = K \cdot x}$ función de proporcionalidad directa. Teniendo en cuenta esta aparente diversidad de significados es indispensable definir tanto los aspectos matemáticos de la función lineal como los de la función de proporcionalidad directa de tal forma que se muestre el isomorfismo entre ellas y sus diferencias con las funciones del tipo $\underline{[f(x) = mx + b]}$

A. La función lineal: Teoría de funciones y Álgebra Lineal

En la teoría de las funciones, una función f lineal se define "cuando a todo x se le hace corresponder el mismo x multiplicado por coeficiente m ". La expresión analítica esta dada por: $f(x) = m \cdot x$ para algún número real m

De otro lado, en el Álgebra Lineal las Transformaciones Lineales se definen como la aplicación T entre dos espacios lineales con el mismo conjunto de escalares T y V , que cumple las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned} a) \quad & T(x + y) = T(x) + T(y) \text{ para todo } x \text{ de } V \\ b) \quad & T(cx) = cT(x) \text{ para cualquier } x \text{ de } V \end{aligned}$$

Estas dos propiedades ponen en evidencia que la transformación conserva la adición y la multiplicación respectivamente.. Ahora bien, si se tiene en cuenta que una función² es una aplicación del conjunto K de números reales (o de algún subconjunto de K) en K , las únicas transformaciones lineales de R en R , tomando como conjunto de escalares los reales, las funciones que cumplen estas propiedades son de la forma : $f(x) = m \cdot x$ para algún número real m .

Pero la función lineal también se puede caracterizar desde su comportamiento como función creciente, esta caracterización lleva afirmar que una función f es lineal si cualquier cambio en la variable independiente causa un cambio proporcional o un incremento en la variable dependiente. Esta caracterización la comporta también las funciones, $f(x) = mx + b$ sin embargo el crecimiento sigue en los dos caso reglas diferentes.

En las funciones $f(x) = m \cdot x$, se cumple que si dobla el valor (o se hace la mitad, o se multiplica por n) los valores de una variable los valores de la otra variable también se doblan (o se hacen la mitad, o se multiplican por n), además cumplen las las propiedades de las transformaciones lineales. Otra de sus características es que existe un cociente constante entre pares valores correspondientes:

² En los libros franceses de matemáticas se distingue la función, aplicación y transformación; en los textos norteamericanos esta distinción en la mayoría de los casos no se realiza, y se puede encontrar que a la aplicación se le denomina función, pero cuando se habla de funciones definidas en los números reales, se les denomina funciones de variable real.

$\frac{y_1}{x_1} = \dots = \frac{y_n}{x_n} = k$; de otra parte en la funciones $f(x) = mx + b$, existe tambien una relación constante entre los incrementos de la variables, de manera que cuando x aumenta (o disminuye) la otra tambien aumenta o disminuye b unidades; ambas rectas tienen la misma pendiente pero la función $f(x) = mx + b$, tiene todos los valores de la variable dependiente aumentados en b unidades con respecto la función $f(x) = m.x$. La constante aditiva es la que diferencia la forma de crecimiento de las funciones que se identifican como afines ($f(x) = mx + b$). Gráficamente se asocian rectas a ambas funciones, con la misma pendiente pero cuya diferencia es que $f(x) = m.x$ pasa por el origen de coordenadas. Es en este sentido que $f(x) = mx + b$ se considera un caso particular de aquellas en la que la constante es cero.

En general a las rectas les corresponde la ecuación $f(x) = mx + b$ donde el parámetro m es la pendiente de la recta y b la ordenada del origen, que representa el desplazamiento o traslación en sentido vertical de la recta asociada $f(x) = m.x$ que pasa por el origen de coordenadas y tiene la misma pendiente.

B. La proporcionalidad entre magnitudes

La proporcionalidad directa entre dos magnitudes³ M y N queda definida cuando se establece un isoformismo f entre sus cantidades⁴ que cumple:

1. La relación de orden es monótona: Si $a < b$ implica $f(a) < f(b)$
2. Conserva el orden y la suma: $f(a + b) = f(a) + f(b)$
3. Si la magnitud es continua, la proporcionalidad f queda unívocamente determinada si:

³ La magnitud se define como un conjunto de vacío, con relación de orden($<$) y una operación interna que cunple propiedades como la transitiva, asociativa, simplificación, diferencia, divisibilidad y el pricipio de Arquímedes.

⁴ a es una cantidad cualquiera, e es la unidad de medida y r representa la medida a con respeto a e

$\underline{a} = \underline{r} \cdot \underline{e}$ entonces $\underline{f}(\underline{a}) = \underline{f}(\underline{r} \cdot \underline{e}) = \underline{r} \cdot \underline{f}(\underline{e})$; la condición 3 se deriva automáticamente de las condiciones 1 y 2. El isomorfismo que establece $\underline{f}$ cumple la propiedades de la transformación lineal.

De otro lado, las cantidades pueden ser descritas por sus medida como lo describe es siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & S \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ \underline{N} & \longrightarrow & \underline{S''} \end{array}$$

$\underline{S}$ y $\underline{S'}$ son subconjuntos de $\underline{R}$ y son la imagenes de las medidas de las respectivas cantidades de $\underline{M}$ y $\underline{N}$. Por su parte $\underline{g}$ establece una correspondencia entre las unidades de medida de $\underline{M}$ y $\underline{N}$, definida por $\underline{f}(\underline{e}) = \underline{k} \cdot \underline{u}$, siendo $\underline{k}$ la constante de proporcionalidad respecto de las unidades $\underline{e}$ y $\underline{u}$.

La aplicación $\underline{g}$ es una aplicación de $\underline{R}$ en $\underline{R}$ pues es la biyección compuesta de:

$$\begin{array}{c} \underline{S} \longrightarrow \underline{M} \longrightarrow \underline{N} \longrightarrow \underline{S''} \\ \quad \quad \quad \underline{g} \\ \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad \underline{g} \end{array}$$

y además cumple las propiedades:

$$\underline{g}(x + y) = \underline{g}(x) + \underline{g}(y) \quad ; \quad \underline{g}(x) = \underline{k} \cdot x$$

Es decir que la función de proporcionalidad entre espacios de medida cumple tambien las propiedades de las transformación lineales.

C. Variación, Dependencia y Teoría de las Proporciones

El concepto de variación es uno de los conceptos centrales en el estudio de la función como dependencia y esta es básica en el Cálculo Diferencial e Integral. Sin embargo su comprensión no es sencilla porque primero toda variación comporta cambios en la variable; segundo porque la variación puede depender de los cambios de la misma variable, como tambien depender de la variación de otra

variable, llamada variable independiente. Son precisamente estos últimos los que determinan los modelos de función. La siguiente situación ejemplifica estos significados:

Una barra de 20 mts de longitud se calienta de una temperatura de 10°C a 50°C . La longitud final de la barra es de 20,02 mts

El enunciado explicita que existe una variación en la longitud de la barra, la cual se calcula por la diferencias del valor final y el valor inicial y se nota: $\Delta L = L_2 - L_1 \equiv 0.02\text{m}$. La variación de la variable L determina en cuanto se incrementa la longitud, y es el resultado del cambio desde el valor L_2 hasta el valor L_1 de la misma variable. En general este cambio en la variable determina que la longitud se incrementa en 2 cm.

Se puede también determinar el incremento de la longitud por cada metro de barra, lo que equivale a calcular el incremento de la longitud con respecto a la longitud inicial, cálculo que se realiza con una razón definida por $\frac{\Delta L}{L_1} = \frac{0.02}{20} \equiv 0.001$. Esta razón se establece entre medidas de la misma cantidad, longitud, sin embargo determina que por cada metro de barra hubo 1 milímetro de incremento.

Pero si el propósito para obtener la variación está enmarcada en la dependencia de variables, entonces la variación de la temperatura juega un papel determinante pues lo que interesa es comparar la variación de la longitud con la variación de la temperatura, esta es expresada por una razón entre cantidades de distintas medidas como: $\frac{\Delta L}{\Delta T} = \frac{20\text{mm}}{50^{\circ} - 10^{\circ}} = \frac{1}{2}\text{mm}/^{\circ}\text{C}$. Esta comparación entre variaciones determina que la longitud se alargó a razón de medio milímetro por cada grado centígrado. Ahora bien el comportamiento lineal se caracteriza porque la razón es constante.

También en situaciones como: *el costo de las llamadas y el número de llamadas que un cliente puede hacer a través del servicio Celurápida*, representadas en tablas como:

Nº de llamadas	Precio \$
1	800
5	4000
10	8000
15	12000
25	20000

La variación siempre se considera multiplicativamente, por ejemplo, la variación multiplicativa de las llamadas es igual a la variación multiplicativa en los correspondientes costos, se calcula por la razón; de otra parte también se observa que la razón entre los valores correspondientes de $\frac{y}{x}$ y $\frac{y}{x}$ se mantiene constante y determina el precio de una llamada. Este tipo de variación también determina un comportamiento lineal que caracteriza la variación directamente proporcional.

Por último la variación también puede ser definida por una regla explícita que permite predecir las variaciones, las cuales son expresiones que relacionan variables. Por ejemplo $\Delta P = 0.2P - r$ representa la *variación mensual de la población de peces en un estanque*; r representa la *razón de pesca mensual*, la cual se asume constante; P representa la *población inicial de peces* y 0.2 la *tasa de crecimiento neta*.

La mayoría de fórmulas o leyes que representan fenómenos de la vida científica o real tienen una estructura que responde a un modelo de función. La comprensión de las características esenciales de estas leyes o fórmulas descritas en escenarios o situaciones concretas, conlleva a comprender la estructura de las funciones matemáticas que modelan estos fenómenos.

En general en las situaciones de variación caracterizadas por la proporcionalidad directa donde x varía directamente con y , e y varía directamente con x , es decir cuando x varía de x_1 a x_2 , y lo hace de y_1 a y_2 es porque si x se multiplica por n , y se multiplica por n ; si x se divide por n , y se divide por n . Lo que implica reconocer la existencia ya descrita, del operador escalar $\downarrow \times a$ (entre cantidades de la mismas medidas) que caracteriza la variación directa; de igual manera este tipo de variación se caracteriza por la existencia del operador funcional

$\times k$ entre cantidades de distintas medidas. La ley que representa estos fenómenos tiene la estructura de la función lineal $y = kx$.

De otra parte, los estudios sobre la noción de función y especialmente el realizado por Sierpínska (1990) muestra que epistemológicamente la evolución del concepto de función guarda estrecha relación con la Teoría de Proporciones. Ello se debió a que la teoría de las Proporciones desarrolladas en los Elementos de Euclides aseguró una base teórica sólida para explicar los fenómenos estudiados. El estudio de las leyes del movimiento a partir de Galileo buscó este respaldo al utilizar la razón **en Magnitudes** (razón entre distancias, razón entre tiempos) para postular su uniformidad “en tiempos iguales, iguales distancias son cubiertas”.

El estudio de la variaciones entre variables para generar las propiedades de las expresiones analíticas que expresan las reglas de cambio se apoyó en las tablas numéricas asociadas a una noción de función como dependencia. El estudio de “el mundo de procesos que transforman objetos en otros” (Sierpínska p. 7, 1992), es decir de f es el que determina como se transforma una variable en otra mientras que la expresión analítica – $f(x) = k \cdot x$, por ejemplo – solo describe la naturaleza del cambio.

El paso entre variación y proporción, se alcanza cuando las relaciones entre cantidades se asume como relaciones entre variables, lo que transforma el sentido de calcular la cuarta proporcional como incógnita $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ a asumirla como relación entre variables:

$$\begin{array}{ccc} M_1 & & M_2 \\ \times a & & a \\ 1 \xrightarrow{\quad} & & \\ \times a & & x \\ b \xrightarrow{\quad} & & \end{array}$$

El aspecto estático de las proporciones se convierte en dinámico pues calcular el valor de un incógnita (la cuarta proporcional) es un problema de predicción, característico de la función.

Matemáticamente el paso de las proporciones como entidad estática a su aspecto dinámico tiene sentido siempre y cuando se define una función f que cumpla $f_{a/b}(d) = c$ si y solo si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ para a, b, c , en M ; se dice entonces que las cantidades $\{a, b, c, d\}$ son proporcionales y la cantidad c se le denomina cuarta proporcional. $f_{a/b}$ es un automorfismo en M y por consiguiente, una proporcionalidad en M . La constante de proporcionalidad es precisamente su razón.

En los fenómenos de variación en contextos de las ciencias por ejemplo, se dispone de una dependencia entre valores $r_1, r_2, \dots, r_n$ y $r'_1, r'_2, \dots, r'_n$ entre los que puede establecer que: *Si se duplican (a si se hacen la mitad o se multiplican por n) los valores de una variable, se duplican (se hacen la mitad, o se multiplican por n) también los valores de la otra variable.*

Los procedimientos para establecer este tipo de variación pueden ser los operadores escalares o funcionales, pero teniendo que las medidas son números reales, su determinación implica el uso de la razón entre la medidas:

$$\frac{r_1}{r'_1} = \frac{r_2}{r'_2} = \dots = \frac{r_n}{r'_n}$$

Alenxandroff (1979) señala que en el estudio de la dependencia de una cantidad a otra, puede considerarse como lineal si se caracteriza por:

- “La propiedad de proporcionalidad: la repercusión de cada factor por separado es proporcional a su valor;
- La propiedad de independencia: el resultado de una acción, es igual a la suma de los resultados de las acciones por separado”. (1979, P. 57)

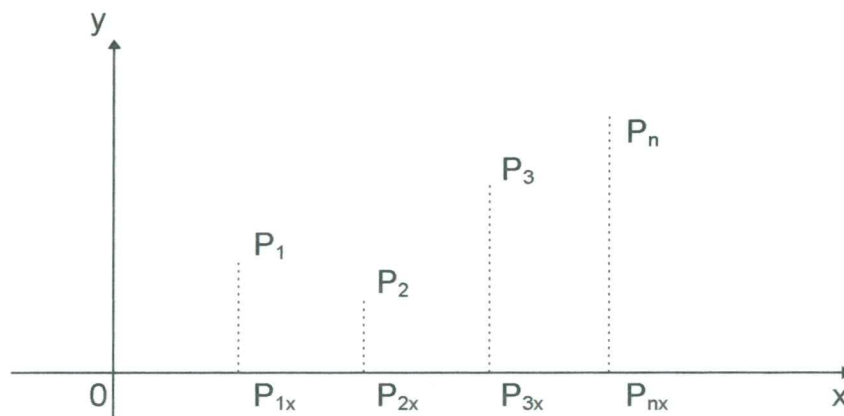
Lo que implica que la ley f cumple las propiedades de linealidad. Por su parte, desde Frudenthal (1983, p 185) resume la proporcionalidad establecida entre magnitudes identificando que la invarianza de razones internas y su equivalente constancia de razones externas significa: *linealidad de la aplicación*

D. Representación gráfica

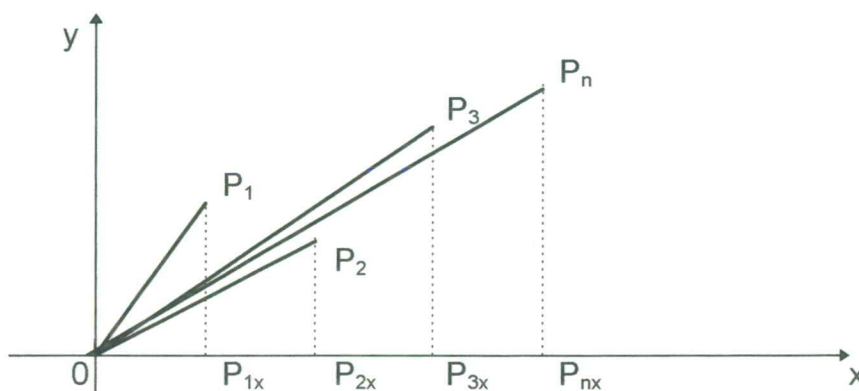
La tabla de valores de las funciones $f(x) = k \cdot x$ da como resultado parejas de números con los que se obtienen gráficas lineales en el sistema coordenado cartesiano. La linealidad se cumple al demostrar que todos los puntos tienen la misma inclinación respecto al eje x , o lo que es lo mismo, que los ángulos son idénticos por tener las mismas amplitudes.

Sean $P_1 (r_1, r_1')$, $P_2 (r_2, r_2')$, ..., $P_n (r_n, r_n')$

los puntos de la gráfica



Y P_{1x} , P_{2x} , P_{3x} , ..., P_{nx} sus respectivas proyecciones sobre el eje x
Si se consideran los respectivos triángulos rectángulos



Se tiene que:

$$\tan(\angle P_1 O P_{1x}) = \frac{r'_1}{r_1} = K, \tan(\angle P_2 O P_{2x}) = \frac{r'_2}{r_2} = K, \dots, \tan(\angle P_n O P_{nx}) = \frac{r'_n}{r_n} = K$$

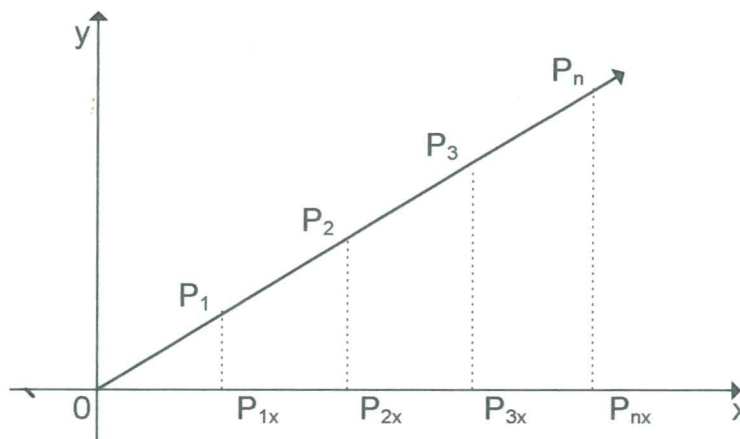
$$\text{Luego: } \tan(\angle P_1 O P_{1x}) = \tan(\angle P_2 O P_{2x}) = \dots = \tan(\angle P_n O P_{nx}) = K$$

$$\text{entonces: } \angle P_1 O P_{1x} = \angle P_2 O P_{2x} = \dots = \angle P_n O P_{nx}$$

entonces: $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \dots, \overrightarrow{OP_n}$ tienen la misma inclinación respecto al eje x,

es decir $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_2} = \dots = \overrightarrow{OP_n}$

por lo tanto $P_1, P_2, \dots, P_n$ están sobre la misma recta.



II 3. Aspectos didácticos

El diseño se realizó integrando actividades individuales, trabajo en pequeños grupos (tres o cuatro estudiantes) con la validación de los procedimientos individuales y colectivos junto con la interacciones realizada por el profesor. Se pretendía proporcionar autonomía en el aprendizaje basada en el principio de que la construcción consensuada amplía el marco conceptual y la comprensión del estudiante. Este tipo de actividad pone de manifiesto diferentes procedimientos empleados tanto en el trabajo individual como grupal, lo que da lugar a producir el conflicto individual. En este sentido el diseño se apoya en el papel que

desempeña el lenguaje en los procesos de comprensión, de explicación y de reconceptualización en las propias construcciones cognitivas. Las interacciones destabilizadoras del profesor se realizan con la introducción de nuevos datos tanto para que el estudiante generalice su estrategia como para generar el posible conflicto con el procedimiento utilizado. Los nuevos datos como los números impares o nuevas tablas (como en el problema 2) generan este tipo de conflicto pues alteran los procedimientos hasta ahora empleados.

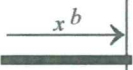
En particular, se integran las investigaciones sobre el concepto de función (Vinner y Dreyfus 1989; Kaput 1991; Dubinsky y Harel 1992; Sfard 1992; Sierpinska, 1990) que enfatizan dos aspectos necesarios para una mejor comprensión del concepto: el uso y características de la representación utilizada y considerar diversas perspectivas para llegar a la comprensión del concepto de función y sus modelos. El papel desempeñado por las representaciones es de especial significación puesto que las diferentes representaciones asociadas al concepto ponen de relieve distintas características y hasta diferentes visiones del concepto (Janvier 1983, p. 24). Por ejemplo, la noción de función como dependencia entre variables alcanza su mejor expresión a través de representaciones como las descripciones verbales, tablas de valores, gráficas o fórmulas o ecuaciones. Lo que impone la necesidad de proponer tareas que demanden la traslación entre los diferentes representaciones y aún las transformaciones dentro de un mismo sistema de representación. Particularmente las tablas de valores y las gráficas cartesianas ayudan a desarrollar un pensamiento sobre la variación y sobre sus patrones de comportamiento.

Las características generales del diseño fueron secuenciadas en las siguientes fases:

1. Situaciones de surgimiento: En esta situación el estudiante se enfrenta individualmente a la resolución de la tarea pero debe explicar por escrito el procedimiento empleado.
2. Situaciones de validación: se componen de las actividades de interacción colectiva donde se validan los procedimientos individuales; le siguen situaciones de familiarización y rutinización donde se pone en juego los procedimientos consensuados.
3. Situaciones de reutilización en problemas más complejos: en estas situaciones se busca que el estudiante utilice procedimientos más globales que le permitan identificar y diferenciar patrones de estructuras de comportamientos lineales y no lineales.

A. Procesos *cognitivos* en contextos numéricos:

Su identificación se sustenta en investigaciones sobre la comprensión de la proporcionalidad (Hart 1981, Karplus et al. 1983, Vergnaud, 1983, Linares, 1992), se clasifican en:

Categoría	Situación problema		Descriptores
Modelo numérico aditivo	2 4 6 10	3 6 9 15	- Coloca los números que faltan, después de 6, 8 manteniendo la constante más 2 en la primera columna coordinando la variación con la constante +3 - Utiliza el modelo de los naturales, siguiente a $\begin{array}{rcl} 2 & + & 1 = 3 \\ 4 & + & 2 = 6 \\ 6 & + & 3 = 9 \end{array}$
Operador escalar			Utiliza el operador escalar, establece verbalmente el patrón de variación
Operador funcional			Utiliza el operador funcional, establece verbalmente o en fórmula del patrón de variación.
Isomorfismo aditivo			Utiliza operadores escalares y funcionales como patrones de variación. y el isomorfismo aditivo para predecir valores de variable

B. Procesos *cognitivos* en el contexto gráfico:

Los procesos cognitivos de las tareas gráficas involucran dos tipos de actividades la interpretación y la construcción. Leninhard propone la interpretación como la acción por la cual el sujeto da sentido a la gráfica, se caracteriza porque se realiza dentro de los datos dados. La construcción, por su parte es la acción por la cual se genera un nuevo dato, crea algo no dado. Una y otra pueden atender a rasgos locales, globales, cualitativos o cuantitativos de la gráfica; según la clase de tareas demandan tipos de actividades – predicción, clasificación, traslación – y pueden también demandar acciones de interpretación y construcción simples o

bastantes difíciles. Precisamente porque los estudiantes con quienes se realiza el diseño no han tenido experiencia alguna en la interpretación o construcción de gráficas y porque diversas investigaciones han señalado como dificultades: la interpretación de la gráfica e identificar patrones de variación, hemos identificado las siguientes acciones cognitivas simples.

Las estrategias empleadas por los estudiantes son:

Reconocimiento de la gráfica desde sus características geométricas

Lectura de la gráfica asociando los nombres de los ejes

Colocación de puntos en la gráfica

La evolución de las estrategias se definió como:

Interpretación de la gráfica como representación de una dependencia de dos variables.

Lectura de patrones de comportamiento lineal

Interpolación y extrapolación gráfica

Predicción del comportamiento de la gráfica a partir del patrón de variación

Traslación entre dos modos de representación, gráfica → tabla, gráfica – tabla → fórmulas tipo renacentista.

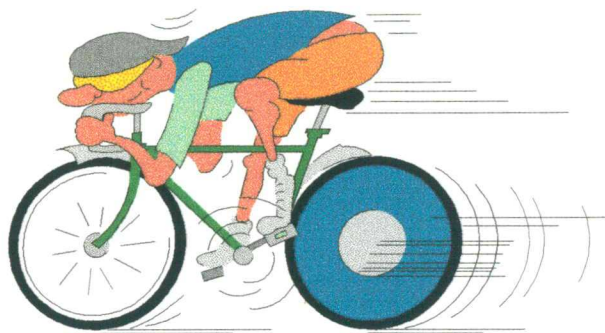
Objetivo del problema	Objeto de estudio
Instaurar el estudio de las tablas y las gráficas como sistemas de representación que permiten construir e interpretar patrones de variación y dependencia. Interpretar y construir las representaciones de patrones de variación característicos de la proporcionalidad directa.	En el cuadro numérico: Análisis de los patrones de variación y sus correlaciones Prealgebraico: establecimiento de la regla de dependencia Gráfico: análisis de patrones de variación en la dependencia.

QUE ES ESTO? PROGRAMA INTERACTIVO?
PRUEBA?

HACIA LA FUNCION DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA

1. Un entrenador tan sólo registró los siguientes datos durante un entrenamiento de ciclismo de uno de sus pupilos, quien mantuvo el mismo ritmo de carrera.

Nº de Vueltas	Tiempo minutos.
3	12
5	20
7	28
9	36
35	



a. Ayúdele a completar la tabla. Explique cómo lo hace.

2. Los registros tomados por el entrenador para otro pupilo quien también mantuvo el mismo ritmo de carrera son :

Nº de Vueltas	Tiempo minutos
2	3
4	6
6	9
10	15

a. ¿Cuántos minutos gasta para dar cinco vueltas ?. Explique su respuesta.

b. ¿ En doce minutos cuántas vueltas ha dado ?. Explique su respuesta.

c: Con sólo los datos de la tabla calcule :
¿Cuánto tiempo gastaría en recorrer veinticuatro vueltas ?. Explique su respuesta.

3. De la tabla, establezca una expresión que permita calcular un valor cualquiera de la segunda columna a partir de su correspondiente valor, en la primera

Nº de Fotocopias	Costo \$
3	75
6	150
9	225
12	300

4. Dos empresas de telefonía celular “Celullama” y “Celurápida” ofrecen al cliente el precio de las llamadas (hasta tres minutos) según las siguientes tablas :

“Celullama”

Nº de llamadas	Precio \$
0	6000
5	9000
10	12000
15	15000
25	21000

“Celurápida”

Nº de llamadas	Precio \$
1	800
5	4000
10	8000
15	12000
25	20000

- Establezca una expresión que permita calcular **en cada una** de las tablas, el precio en pesos para cualquier número de llamadas.
- Si el número de llamadas que hace un usuario al mes es de 150, ¿cuál de las dos empresas le traería más beneficio ?.

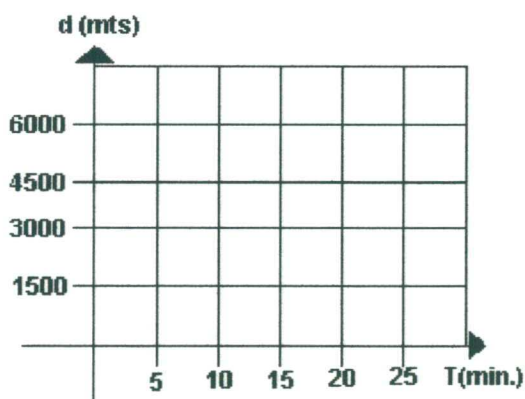
Gráficas: patrones y crecimiento

1. La tabla muestra el tiempo que gasta y la correspondiente distancia recorrida por un atleta que conserva siempre el mismo ritmo de carrera.

Tiempo minutos	Distancia metros
5	1500
10	3000
15	4500
20	6000



a. En el diagrama cartesiano marque un punto para cada tiempo y su distancia correspondiente según la información dada por la tabla.



b. ¿Cómo están ubicados los puntos?

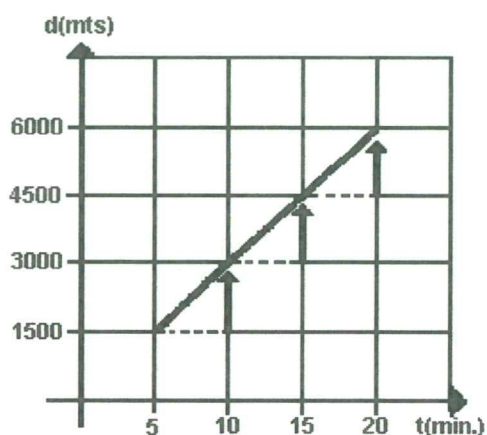
c. ¿Qué representa la gráfica?

d. Utilizando solamente la gráfica calcule, aproximadamente, la distancia recorrida por el atleta a los 12 minutos.

e. ¿Cuánto tiempo ha gastado si ha recorrido 5000 mts?

f. ¿Cuántos metros recorre en 40 minutos? Explique su respuesta.

2. En la gráfica :



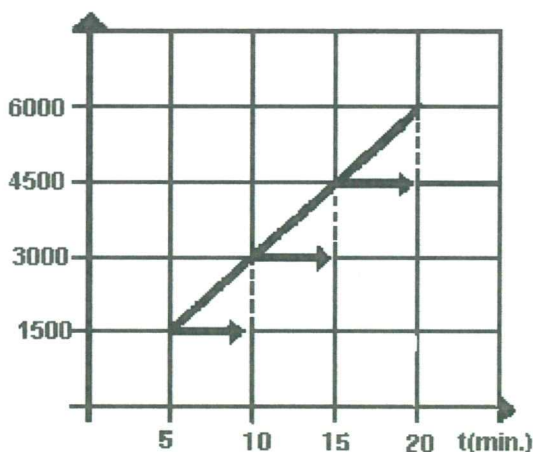
a. ¿Cuándo el tiempo aumenta de cinco a diez minutos, cuánto aumenta la distancia ?

b. ¿Cuándo el tiempo aumenta de diez a quince minutos, cuánto aumenta la distancia ?

c. ¿Si el tiempo aumenta de treinta a treinta y cinco minutos, el aumento de la distancia será el mismo que el de a y b ? ¿Por qué ?

d. En esta gráfica cuando el tiempo aumenta cantidades iguales, ¿ qué le sucede a la distancia ?

3.



a. Si la distancia aumenta cantidades iguales ¿Qué le sucede al tiempo ? ¿Su aumento es constante ?

b. Calcule el cociente (razón) entre el aumento de la distancia y el aumento del tiempo.

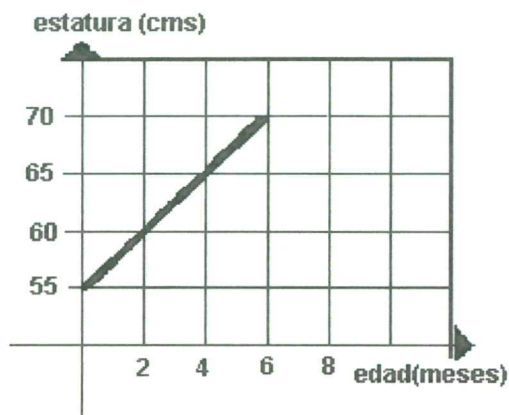
c. Calcule la razón entre cada par de valores correspondientes.

d. Prolongue la gráfica : ¿qué información adicional se obtiene ?

e. Teniendo en cuenta tanto la tabla de la pregunta 1 (página 1) como la gráfica de la pregunta 3 (página 2) escriba una expresión que permita calcular la distancia recorrida para cualquier tiempo.

4. La siguiente gráfica representa la relación entre la estatura y la edad de un

niño.



a. ¿Cuándo el tiempo aumenta cantidades iguales qué le sucede a la estatura ?

b. Calcule la razón entre el aumento de estatura y el aumento del tiempo.

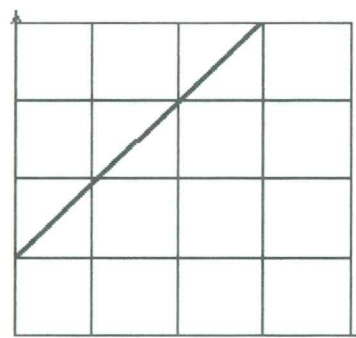
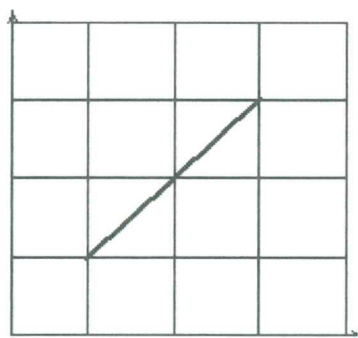
c. Calcule la razón entre cada estatura y su correspondiente edad.

d. A partir de la gráfica elabore la tabla.

e. Teniendo en cuenta tanto la tabla como la

gráfica escriba una expresión que permita calcular la estatura para cualquier edad.

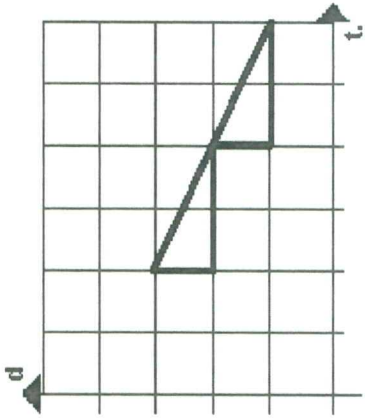
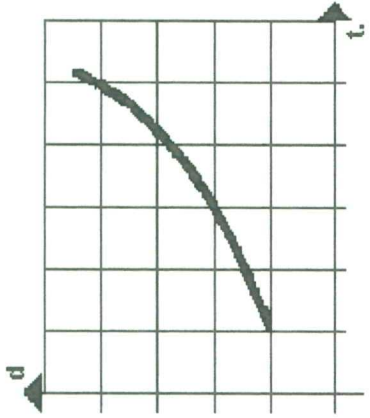
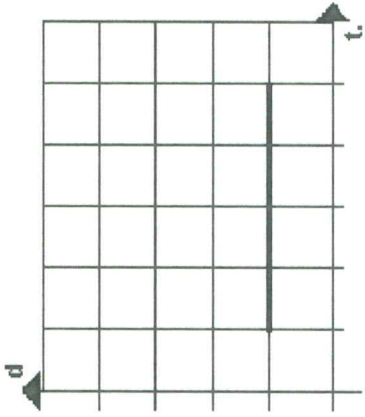
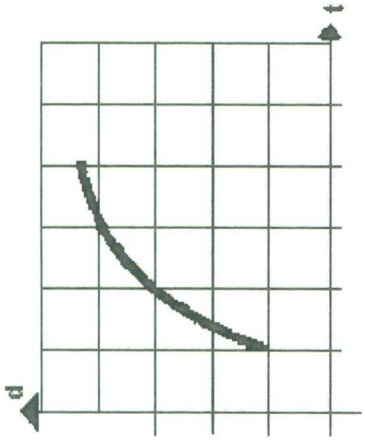
5. En las siguientes gráficas :



a. Establezca diferencias y similitudes.

b. Para cada gráfica inventa una situación que pueda ser representada por ella.

6.



Bibliografía

ARTIGUE M: 1995 Ingeniería Didáctica. Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas

AZCÁRATE, G. C., y DEULOFEU, P. J., 1990. Funciones y Gráficas.

BELL, E.T. 1985. Historia de las matemáticas..

BELL, A., y JANVIER, C., 1981. The interpretation of graphs representing situations. For the Learning of Mathematics, 2, 1.

CHEVALLARD, 1991. La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La pensée sauvage.

DOUADY, R: 1995. La ingeniería Didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas

DUBINSKY, HAREL EDITORS. 1992. The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy. M.A.A. Notes and Reports Series Editorial Studies Board. Purdue University

EL CONCEPTO DE LA FUNCIÓN HACIA LA MITAD DEL SIGLO XIX. 1996. Área de Educación Superior Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. IPN. Serie Traducciones

FARFAN R, M., 1995 Ingeniería Didáctica Área de Educación Superior Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. IPN

FIOL, M, L, M., y FORTUNY, A, J.M., 1990. Proporcionalidad Directa, (La Forma y el número).

GARCÍA G., ESPITIA L., SERRANO C., 1995 Elementos para la construcción de una didáctica de la función. Serie Cuadernos de Investigación. U. Pedagógica Nacional

GARCÍA G., SERRANO C. ESPITIA L., 1995 "La función lineal del tendero: la tabla". Memorias Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e Investigación en Matemática Educativa. CINVESTAV, U. De la Habana.

GARCÍA G., ESPITIA L., SERRANO C., 1996. "Situaciones de variación numérica y representaciones asociadas: génesis de la función lineal". Rev Notas de Matemáticas. No 36. U. Nacional

GARCÍA G., ESPITIA L., SERRANO C., 1996. Análisis del contenido de variación en textos escolares. Memorias Décima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de

profesores e Investigación en Matemática Educativa. CINVESTAV. Universidad de Puerto Rico.

JANVIER, C., 1987. Representation and Understanding: The notion of function as an example. En Janvier C, (e d.) . Problems of representation in the teaching and learning of mathematics pp. 67 - 71. Londres: LEA Publ. Londres.

KARPLUS, R., PULOS, S., y STAGE, E, K., 1983. Proportional Reasoning of Early Adolescents. Edit LESH, R., y LANDUA, M., Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, pp. 44 - 89.

LIENHARD G., ZASLAVSKY O., STEIN R. M 1990. Functions, graphs and graphing: tasks, learning and teaching. En Review of Educational Research. Spring Vol 60 No 1. Págs. 1-60

LLINARES, C, S., SÁNCHEZ G; V., 1992 El aprendizaje desde la instrucción: la evolución de las estrategias personales en tareas de proporcionalidad numérica. Rev. Enseñanza de las Ciencias 10 (11pp.37-48)

RENÉ DE COTRET, S., 1985. Etude historique de la notion de fonction: Analyse épistemologique et expérimentation didactique. Memoria de Maîtrise en Mathématiques. Université du Québec. Montreal.

ROMBERG, T; LAMMON; S.; y ZARINNIA, A., 1988 The essential features of the Mathematical Domain: Ration and proportion (NCMSE: Madison).

VERGNAUD, G., 1983. Multiplicative Structures. Edit LESH, R., y LANDUA, M., Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, pp. 126 - 174.

VERGNAUD. G., 1991. El Niño, las Matemáticas y la Realidad. (Problemas de la Enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Primaria).

VINNER S., DREYFUS T. 1989. Images and definitions for the concept of function. En Journal for Research in Mathematics Education Vol 20 No 4, 356 -366.

YOUSCHEVITCH, A.P., 1976. The concept of function up to the middle of the 19th century, Archive history of exact sciences, 16, (p. 36 - 85). Traducción de Bellemin, J.J., Fragmentos d'histoire des Mathématiques, Broucheure APMEP , 41, 7 - 68.

f.

EL CONCEPTO DE FUNCION EN TEXTOS ESCOLARES

'LIBRO'

GLORIA GARCIA O., CELLY SERRANO, LUIS E., ESPITIA

COLCIENCIAS

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Introducción

La necesidad de realizar este estudio se deriva de nuestro compromiso como profesores de la Universidad Pedagógica Nacional, en tanto su misión como institución encargada de la formación de profesores y en particular de la formación de los profesores de matemáticas, es participar y aportar soluciones desde la investigación, a los problemas y dificultades de nuestro sistema educativo. En este sentido el conocimiento sobre el sistema de enseñanza de las matemáticas y en particular sobre los textos escolares se constituye en un punto medular en las posibilidades de su transformación.

El estudio de cómo vive y qué saberes didácticos aportan los textos escolares sobre el objeto *función* se inscribe en el enfoque de la investigación “Una propuesta didáctica para la construcción de los conceptos de función, función lineal¹” (García G., Serrano C., Espitia, L., E., 1.995) el cual, tiene como problemática el establecimiento de los elementos que han de ponerse en juego para propiciar el aprendizaje de las matemáticas en situación escolar, para realizar este propósito se estudia el sistema didáctico: maestro profesor, alumno, y saber enseñado, específicamente el concepto de función. Pero esta triada esta condicionada por factores externos tales como programas, cursos, horarios y textos que imponen restricciones a su funcionamiento. En particular el texto escolar, puede ser un condicionante de estas restricciones en cuanto a que es portador de discursos cognitivos sobre una disciplina, en nuestro caso la matemática, al mismo tiempo que es portador de saberes didácticos. La importancia de los textos escolares ha comenzado a ser incluida en las investigaciones en educación matemática, en los últimos veinte años, por su relevancia como material didáctico (Robert y Robinet, 1989; Sanz, 1994; Chandler y Brosnan 1995; Batanero y Serrano 1997) y porque hacen parte de las concepciones institucionales, las cuales pueden ser origen de obstáculos didácticos en las concepciones de estudiantes y profesores (El Bouzzoauai 1988, Ruiz Higuera 1994).

Nos basamos también en el papel protagónico que han tenido los textos en el proceso de masificación de la educación, y en la divulgación de las reformas de las Matemáticas. En particular, en nuestro país, en lo que concierne a la enseñanza de las matemáticas han sido casi los únicos medios, junto con los programas, para impulsar las transformaciones en cuanto a contenidos y exigencias didácticas de renovación.

¹ Financiada por COLCIENCIAS y la UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

En razón a estos presupuestos y atendiendo a las restricciones encontradas en los estudios de las concepciones de estudiante y profesores sobre el concepto de función en la Básica Secundaria (García G., Serrano C., Espitia L., 1996 - 1997), realizamos el estudio del objeto función en los textos escolares en las décadas del 60 y del 70, en tanto en ellas se configura una escisión en la enseñanza del concepto. En la década del 60, la enseñanza de las matemáticas seguía los lineamientos de lo que se ha llamado *lo básico*, la matemática se interpreta como colección de vínculos aislados. Para el estudio hemos seleccionado los textos Aritmética y Álgebra de Aurelio Baldor, por ser esta una serie que formó parte esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el país.

La década del 70 se inscribe en lo que se ha denominado la Reforma de las matemáticas modernas, que se caracterizó por la presentación unificada de las matemáticas a través de las estructuras y el lenguaje conjuntista. La serie Matemática Estructurada Moderna ha sido seleccionada como el texto escolar de la década, pues además de institucionalizar las matemáticas modernas se constituyó en el texto imprescindible para una gran parte de los maestros puesto que a través suyo muchos profesores se actualizaron en matemáticas. Cabría también señalar que quizá se constituye en la primera serie (6 textos, cubriendo todos los niveles de lo que entonces se llamaba el Bachillerato) elaborada por autores colombianos.

Finalmente reiteramos que nuestro propósito al ofrecer a los educadores en matemáticas este trabajo tiene la finalidad de ser un aporte susceptible de mejoras y cuestionamientos por parte de la comunidad de educadores en matemáticas, pues consideramos que el proceso de transformación y conocimiento que sufrimos los autores a lo largo del trabajo de investigación, no es de carácter terminal, muy al contrario podemos afirmar que sólo es el inicio para consolidarnos como un grupo de estudio en la disciplina de la Didáctica de la Matemática.

I. El papel de los textos.

En la historia de la matemáticas el libro de texto ha contribuido a la expansión de la matemática pues a través suyo se han creado escuelas de matemáticas, Carl Boyer (1968), en su *Historia de la Matemática*, en cada periodo histórico describe tanto libros resultados de la investigación matemática como también los libros texto de cada época por el papel protagónico que ocuparon en la difusión y formación de escuelas en áreas de la disciplina.

Para Boyer, el primer libro texto que se convirtió en *best seller* es *Elementos* de Euclides puesto que se puede considerar como texto introductorio desde “el que se expone en un orden lógico los fundamentos de la matemática elemental” (Boyer C., 1968, p 45). Al siglo XVIII lo denomina “el siglo por excelencia de los libros textos por la cantidad de publicaciones de textos elementales sobre Álgebra y Geometría Descriptiva – escritos por matemáticos como Euler, Monge y S Lacroix –, porque produjeron una verdadera revolución en la enseñanza de estas áreas”. En particular Boyer destaca la “excepcional calidad didáctica del Álgebra de Euler, ”por las repercusiones que tuvo en el avance en formación de una escuela sobre el pensamiento algebraico.

En la historia de la matemática en Colombia, los libros texto también han contribuido a la formación de escuelas en Matemáticas. I., Castro (1997) en su escrito “Pasado y presente del cálculo en Colombia” relata cómo los libros “Cours D' Analyse de L' Ecole Polytechnique y el Cálculo de Granville” usados durante aproximadamente 30 años contribuyeron a la divulgación del Cálculo en el país. Castro anota que en particular los libros de Tom M. Apóstol, son los “que más han influenciado en la enseñanza de la matemática superior”, en el país (1997, p. 24). Así mismo el uso de libros provenientes de las escuelas matemáticas norteamericanas y francesas generaron tendencias en la formación en el Cálculo. En la Universidad de los Andes, “ el uso de varios textos de EEUU a principios de la década del cincuenta, dio lugar al desarrollo de reflejos simbólicos a través de la operatividad” (Castro, 1997, p. 27), cuestión que fue reformulada al introducir textos como el Taylor o el de Spivak. En la Universidad Nacional, la introducción de los textos de Bourbaki en la década del 60 como textos necesarios para la formación científica en la matemática, fueron la base de la escuela de matemáticas en esa institución.

La institucionalidad de los textos escolares se debe a la conformación de los sistemas educativos públicos y generales de la educación en tanto comienzan a ser controlados por el Estado y son considerados medios divulgadores del saber seleccionado oficialmente para ser enseñado. Shubring (1987) señala que en las

reformas educativas propuestas por la Revolución Francesa (1792), “la elaboración de un buen texto escolar fue de primera importancia” puesto que “podían garantizar la lealtad a los rasgos distintivos de la república” mejor que los maestros, en tanto estos requerían de un proceso de reeducación. Particularmente los textos escolares de matemáticas cobran sentido como parte integral del sistema educativo cuando la matemática comienza a ser valorada como saber cultural indispensable en y para el desarrollo de la sociedad”.

En este contexto se inscribe la obra de Lacroix, estudiado por Shubring (1987) como autor de textos escolares, comprometido con el establecimiento de “una instrucción matemática”. Con su obra “contribuyó decisivamente a la constitución de la escuela de matemáticas en Francia” (Shubring G 1987, p. 16). Su mérito, como autor de textos escolares, lo sintetiza Shubring en la reestructuración substancial y organización con objetivos educativos de las dispersas investigaciones matemáticas publicadas hasta el momento. La reestructuración consistió en ordenar en campos conceptuales los elementos básicos de áreas del conocimiento matemático, en presentarlas en secuencias ordenadas y en cambiar los estilos de presentación de tal manera que las teorías mas difíciles fueran descritas con claridad, precisión y de la manera más simple, pero que al mismo tiempo divulgaran los avances de los investigadores matemáticos.

En este siglo, particularmente en la reforma de la Matemáticas Modernas² (décadas del 60 y 70) los textos escolares ocuparon un papel protagónico pues fueron los responsables en gran parte de institucionalizar el saber establecido en programas curriculares. Z. P. Diennes uno de los grandes impulsores de la reforma, señalaba que una de las cuatro formas de resolver el problema del reentrenamiento de los profesores eran precisamente los libros en cuanto a través de ellos “los maestros podrían aprender las nuevas matemáticas y las nuevas técnicas de enseñanza” (1975, p. 131).

Una serie de matemáticos dedicaron parte de su tiempo a escribir tanto libros dirigidos a la presentación de los lineamientos modernos del pensamiento matemático -¿Qué son las matemáticas? escrito por Courant y Robbins-, como a escribir textos escolares con el fin de presentar las matemáticas modernas para no matemáticos. R Godoment, por ejemplo, señala que la “introducción de nociones de álgebra relativamente modernas y generales en los programas de

² Para una mayor comprensión de los presupuestos filosóficos de la reforma y de su significado remitimos al lector a artículos como: “Las Matemáticas modernas en América Latina: Filosofía de una Reforma” de Ruiz Z., A. En educación Matemática en las Américas VIII CIAEM. UNESCO 1.996 y al artículo “Reformas de la enseñanza de las matemáticas escolares: perspectivas para su desarrollo” de García G. En Revista EMA. Una empresa docente 1.996

matemáticas en las Facultades de Ciencias ha hecho urgente la redacción en francés de un libro de referencias accesible a los principiantes” (p. 255, 1986). En el prólogo al libro *Curso de Álgebra*³ señala que los temas presentados (conjuntos, funciones; grupos y anillos, cuerpos y números complejos, espacios vectoriales, etc.) reflejan la evolución de las matemáticas en los “últimos cincuenta años “pero pensados y traducidos en un estilo “que hasta ahora estaba reservado a los libros destinados a matemáticos profesionales” (p. 256). En este mismo sentido J. Dieudonné, en su prologo al libro “*Álgebra Lineal y Geometría Elemental*”⁴ dirigido a profesores, señala que la orientación general y el contenido del libro tiene la idea de prepara” al estudiante para que asimile lo mas fácilmente posible la enseñanza actual” (p. 272 1986).

En síntesis, sin lugar a dudas la divulgación de la reforma generó a escala internacional toda una industria de textos de matemáticas con el fin de “provocar una socialización extraordinaria de la nueva matemática” (Ruiz Z., A., 1992, p. 16).

En el país, la serie de textos publicados (30 aproximadamente) por el profesor Yu Takeuchi, desde 1.959, puede considerarse como una serie de textos elementales si se tiene en cuenta que el mismo autor señala que “buscaba la popularización de la matemática” y que la organización del texto consistía en ofrecer a través de párrafos, “una lección de una hora de clase, facilitando de esa manera el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo” (Y. Takeuchi, citado por Castro, 1997, p. 22).

La participación de investigadores matemáticos de renombre en la escritura de textos escolares, se dio en el contexto europeo – Francia, Bélgica – y en los Estados Unidos. En este país a través de la creación de grupos de estudio como School Mathematics Study Group, Minnesota School Mathematics Center, se convocaron investigadores matemáticos para escribir libros.

En América Latina, la iniciativa de la reforma fue recibida “primeramente por los libros de texto del Grupo de Estudios de las Matemáticas escolares de los EUA” (Ruiz Z., A., 1.992. p. 5), la tarea prioritaria para la introducción de la reforma de las Matemáticas Modernas en estos países fue la de traducir o elaborar textos con “el fin de echar a andar con premura la reforma”. El movimiento se impulsó con la creación de la Primera Conferencia Interamericana de Educación Matemática y

³ Cours d'Algebre, Paris Hermann 1.963. Trad. Castellana de Mario Melendez Curso de Algebra, Madrid, Tecnos 1.974

⁴ Algebre linéaire et géométrie élémentaire. Paris Hermann 1.964. Trad: Al castellano de A. Pardo Fraile álgebra lineal y geometría elemental . Madrid 1.971.

del Comité Interamericano de Educación Matemática, los que contaron con una amplia financiación de la National Science Foundation de los EUA así como con la ayuda del programa Alianza para el Progreso.

En Colombia, la situación no fue distinta, la reforma de las matemáticas modernas fue institucionalizada por textos traducidos, la producción nacional de serie de textos escolares sobre las matemáticas modernas fue iniciativa de editoriales privadas. Para una gran mayoría de profesores, los textos actuaron como los medios del reentrenamiento señalados por Dienes, puesto que en su gran mayoría no estaban preparados para enseñarlas.

Cabe resaltar que durante la década del 60 dentro de las políticas de la Alianza para el Progreso circuló en el país la serie “Matemáticas para la escuela Secundaria” en el cual se anota “Texto preparado bajo la supervisión del Personal de las muestras de Libros de Texto, del grupo de estudio de la matemática escolar”, el texto señala que es “una traducción preliminar de la edición inglesa revisada”, los autores de esta serie son cuatro profesores de escuelas de Lyons, New Trier, y Williams acompañados de dos profesores de las universidades de Yale y Cornell. Esta serie tuvo en su primer momento una circulación restringida, centros de formación de maestros como la Universidad Pedagógica y la facultad de Educación de la Universidad Nacional, posteriormente fue editada casi en su totalidad por una editorial colombiana de carácter privado. La serie presentaba algunos de los contenidos de la matemática moderna – polinomios, plano numérico real, enunciados abiertos y su validez, enunciados abiertos con dos variables, el concepto de función, entre otros – pero en el sentido funcional de sus aplicaciones, sin la presencia del lenguaje conjuntiva ni la simbología que caracterizaría junto con otros aspectos a la matemática moderna.

Una constante en la elaboración de los textos para la Reforma fue creer que el dominio de la matemática y una cierta intuición didáctica eran suficientes para su elaboración. El problema, fue considerado como el de elementarizar los fundamentos de la Matemática Moderna “en el que el concepto de elementarización se entendió como transformación activa del contenido matemático en formas más elementales con una doble significación: ser fundamental y accesible para los grupos de estudiantes que la reciban” (Biehler R., citado por R., M Farfán, 1995 p 2). La accesibilidad fue entendida como la secuenciación de cuestiones fundamentales, de esta manera se organizó la progresión del aprendizaje siguiendo la lógica de construcción de las estructuras matemáticas.

Pero no podría desconocerse los avances de modernas teorías pedagógicas, métodos activos, así como los aportes de la Psicología Cognitiva, o el conductismo o profesores de matemáticas como Z., Diennes o los enfoques pedagógicos que intentaron ajustar la enseñanza de las estructuras a la teoría piagetiana, contribuyendo a las transformaciones didácticas necesarias para convertir las estructuras en objetos de enseñanza y de aprendizaje.

La importancia del texto la describe Cantoral (1997) porque “impone una distribución y una jerarquía de los conocimientos y contribuye a forjar los andamios intelectuales tanto de los alumnos como de los profesores” (p. 14). Esta característica lo convierte en uno de los factores del entramado de relaciones institucionales que se conjugan para lograr el aprendizaje de los estudiantes puesto que su valor como herramienta didáctica es considerado como “paradigma del conocimiento que hay que transmitir” (Rico L., 1990, p. 229). Con el avance de la Educación Matemática como campo de formación académica e investigativa, la elaboración de textos como materiales didácticos imprescindibles en el funcionamiento del proceso enseñanza y aprendizaje ha integrado los avances de la investigación en campos específicos (álgebra, geometría, cálculo, etc.) y por ende el reconocimiento a las adaptaciones didácticas que sufre el conocimiento matemático cuando pasa a ser objeto de enseñanza y de aprendizaje.

1.2 Elementarización o transformación del conocimiento científico?

La transformación que sufre el conocimiento científico cuando pasa a ser objeto de enseñanza se enmarca en las reflexiones sobre los objetos de la Pedagogía, y de la Didáctica con el fin de dilucidar las posibilidades de constitución como disciplinas autónomas. Entre los aportes que se destacan, es el elaborado por Basil Bernstein (1988,1990,1993) quién desde una teoría sobre el discurso pedagógico identifica los rasgos intrínsecos que lo constituyen y lo distinguen al proponer que “es un principio de recontextualización que transforma lo real en virtual o imaginario” (1990, p. 123) y en el cual lo institucional es el resultado de una desubicación de un discurso primario original para un campo/contexto diferente. El contexto primario está conformado por el saber científico, por sus prácticas y actividades y por las creencias sobre sus objetos. De este contexto se seleccionan objetos, teorías y prácticas para ser reproducidas por el discurso pedagógico en los diferentes niveles educativos, en este proceso se constituye el contexto secundario de reproducción del discurso primario.

Es en el paso de un contexto a otro donde se opera la transformación del discurso primario; el proceso, señala Bernstein, garantiza que el texto resultado

de la desubicación deja de ser el mismo puesto que de un lado debe ser simplificado, condensado, lo que de suyo lo modifica, y de otro lado, debe ser transformado en todo sentido pues responde a fines y objetivos del nuevo contexto. Para Bernstein la transformación no termina en este proceso, continua cuando se vuelve activo, es decir, cuando es incorporado al funcionamiento del discurso pedagógico. La transformación se realiza a través de textos.

En el campo de la enseñanza de las matemáticas, la línea de investigación de la escuela francesa Didáctica de la Matemática centra su interés también en establecer un marco teórico original, con sus propios conceptos y métodos estrechamente ligado a las matemáticas y a las teorías específicas de aprendizaje. Esta línea considerada fundamental, ha desarrollado modelos que abarcan con un enfoque sistémico las dimensiones sociales, cognitivas y epistemológicas del sistema didáctico compuesto por la triada maestro, alumno, conocimiento matemático.

Desde este enfoque se describen los entornos de esta triada; el entorno más próximo, según Chevallard (1998,1990) esta constituido por un principio denominado sistema de enseñanza, el que a su vez está inmerso en un entorno social, cultural, tecnológico y científico que influye y condiciona el funcionamiento de todo el sistema. Es en el sistema de enseñanza, denominado nooesfera, donde se seleccionan los aspectos del saber científico que van a ser enseñados, en este lugar se inicia el proceso que Chevallard denomina transposición, y que necesariamente se constituye en textos pues su producto son los programas oficialmente establecidos. En esta, se secuencian, organizan y temporalizan los saberes matemáticos, este proceso necesariamente los transforma. Este proceso, conforma la primera etapa de la transposición, es un proceso externo y hasta épocas muy recientes el profesor no intervenía en esta etapa. Los siguientes procesos de transposición son internos, puesto que tienen lugar al interior del sistema didáctico, en su funcionamiento y en las interpretaciones realizadas por instituciones, profesores y estudiantes.

El complejo proceso de adaptación que sufre el saber científico cuando pasa al ámbito escolar muestra claramente que el problema no es solamente elementalizar aspectos del conocimiento matemático, – entendida como organización lógica de partes del saber – pues el problema tal como lo ha planteado la escuela francesa para la didáctica de la Matemática es precisamente estudiar como dominio investigativo todo el complejo sistema de adaptaciones y restricciones que sufre el conocimiento matemático, con el fin de establecer una vigilancia epistemológica que de cuenta de sistemas didácticos

coherentemente cognitivos y cumplir así los fines sociales de todo sistema de enseñanza.

Teniendo en cuenta el papel protagónico de los textos escolares en el proceso de transposición como medios que institucionalizan las reformas curriculares y atendiendo a que éstas obedecen a problemas de justificación y posibilidades de implementación de una sociedad – sistema escolar, cualificación de maestros, entre otros – y atendiendo también a nuestra historia en las reformas de la matemática, así como a los vientos de renovación que nos llegan a través del uso cada vez más común de textos traducidos, el estudio de los textos escolares de matemáticas se hace indispensable para integrar una visión de conjunto, tanto del estado actual de la enseñanza de las matemáticas como de los probables cambios estructurales que en un futuro mediano debemos iniciar

II. Visión teórica y didáctica del concepto de función

II.1 Aspectos matemáticos de la evolución del concepto

La importancia del concepto de función se debe a sus múltiples campos de aplicaciones prácticas y a su potencialidad dentro de las matemáticas. Su largo proceso de evolución conceptual (3.700 años, aproximadamente) donde se suceden una tras otra invariantes, representaciones (gráficas, simbólicas) que van perfilando definiciones sucesivas hasta alcanzar el nivel de generalización que comporta la definición moderna de terna, pone de manifiesto su potencia al mismo tiempo el por qué de sus múltiples aplicaciones.

Esta potencialidad se muestra en los diversos campos en los cuales la noción comenzó a surgir como una herramienta útil para modelar fenómenos de la vida cultural en diversas épocas. En su desarrollo histórico la noción se manifestó desde la antigüedad de forma implícita en la construcción de tablas para cálculos aritméticos y para la astronomía, no siendo reconocida como objeto de estudio.

Pero su evolución como concepto se dio asociado al estudio del cambio, en particular del movimiento de manera cualitativa, el cual se convirtió en soporte fundamental de su desarrollo “prácticamente durante todo el trabajo de los siguientes doscientos años” (Kline M., 1979, p. 446). El estudio del cambio, se inicia con la representación gráfica - geométrica, construida por Nicolás Oresme (s. XIV) como método para representar las cualidades cambiantes de los objetos. Utiliza la continuidad de los segmentos para expresar la relación de variabilidad entre cantidades variables, pues no se disponía de un continuo numérico para representar el movimiento, de esta forma, las gráficas se consideraron modelos geométricos de las relaciones funcionales. Con la Teoría de las Latitudes, Oresme elabora una teoría pura comprobable, exenta de experiencias, pues se abstrae la forma o las cualidades concretas de los problemas.

Para Youschkevitch (1976) esta teoría estaba basada “en el uso consciente de ideas generales acerca de las cantidades variables dependientes e independientes” (1976, p.17) pues cada una de las cantidades involucradas, latitud y longitud, se “interpretaban de manera general, la latitud dependiente de su longitud”; en la representación gráfica las dos cantidades corresponden a lo que en el lenguaje moderno se denomina ordenada y abscisa.

Galileo introdujo lo numérico en las representaciones gráficas e hizo una interpretación de la teoría de las latitudes para expresar las leyes del movimiento, a la que le incorporó el lenguaje de la Teoría de las Proporciones, dando un sentido de variación directa o indirectamente proporcional. Es así como las representaciones gráficas aún siendo cualitativas, o los enunciados verbales

en términos cinemáticos se convirtieron en la forma de introducir las funciones.

Con los trabajos de Descartes y Fermat (s. XVII) sobre las curvas se introduce por primera vez la idea de que una ecuación en x e y es un medio para expresar la dependencia entre dos cantidades variables. Surge así la primera concepción de función asociada a lo analítico - geométrico. Este aporte en el contexto del desarrollo de la matemática, relacionar dos ramas Geometría y Álgebra, introdujo las primeras versiones de expresión de relaciones numéricas entre propiedades de objetos geométricos. Con el apoyo en el desarrollo del Álgebra, introducción de signos, para las operaciones, utilización de letras para representar cantidades desconocidas y constantes, junto con los progresos alcanzados en la extensión del concepto de número, aparición de los imaginarios, la dependencia entre variables comienza a ser reconocida como una relación que se expresa por medio de expresiones analíticas, al reconocer que una *ecuación entre x e y expresa la dependencia entre ambas*, Descartes y Fermat introducen el método analítico para la representación de las funciones en ecuaciones algebraicas, asociadas a las curvas geométricas, las curvas cuya naturaleza no era geométrica se denominaron mecánicas (Youschkevitch, 1976).

Para Youschkevitch, fue este método el que revolucionó el desarrollo de la matemática (1976, p. 28) , pues el uso de las expresiones analíticas en las cuales las operaciones se efectúan siguiendo reglas estrictamente específicas aportó al estudio de la función y se amplió al cálculo infinitesimal, lo que determinó que el pensamiento funcional pasara a predominar en el trabajo matemático, pero siempre expresado algebraicamente.

Con los trabajos de Newton (s. XVI) se hizo posible representar analíticamente cualquier relación funcional. Newton al resolver problemas del movimiento asociando ideas físicas y matemáticas introduce el método de representarlas en series infinitas de potencias, al que denominó Método de fluxiones (1670) , pero las ideas principales eran expresadas en términos mecánicos y planteó de esta manera los dos problemas fundamentales del cálculo infinitesimal, la diferenciación y la integración. Para Newton el movimiento está caracterizado por la velocidad, la variable independiente (fluente) es una cantidad correlacionada (quantitas correlata) a la cantidad dependiente (relata).

Leibniz (s. XVII) introduce por primera vez el término función asociándolo a las representaciones geométricas, pero separándolo de la variación de magnitudes físicas al caracterizarlo como: "ciertas longitudes tales como abscisas, ordenadas, tangentes, normales, etc., asociadas con la posición de un punto en un punto en una curva" (Leibniz, citado por Youschkevitch, 1976). Sin embargo el vocablo

función sigue ligado a lo geométrico, segmentos en general, lo que seguía preocupando porque no indicaba de manera general “cantidades arbitrarias dependientes de alguna variable”. Con base en estos argumentos Bernoulli intenta generalizar la noción al formular la siguiente definición “llamamos función a las diversas cantidades dadas de alguna forma por una (cantidad) indeterminada x , y por constantes ya sea algebraicamente o trascendentemente” (Bernoulli citado por Youschkevitch, 1976, p. 36), ésta se convierte en la primera definición de función como expresión análítica. Bernoulli también propone las notaciones φ y f x para distinguir la característica de una función y para escribir el argumento.

Con este avance y con el desprendimiento paulatino de los conceptos del Cálculo de lo geométrico y lo mecánico, se inicia el estudio del análisis matemático como una disciplina científica autónoma. En este marco es Euler (s. XVIII) quién continua el camino de precisar la noción de función, comenzando a definir nociones iniciales como son constante y cantidad variable. La primera la define como “Una cantidad variable es una cantidad indeterminada, o universal que comprende en sí misma a absolutamente todos los valores determinados” con esta definición, la cantidad variable comprende todos los números tanto positivos, como fraccionarios, racionales, irracionales y trascendentes. Con estas aclaraciones entra a definir la noción cambiando el término cantidad, propuesto en la definición de Bernoulli por el de expresión analítica “La función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de esa cantidad variable y de números o cantidades constantes” (Euler citado por Youschkevitch, 1976, p. 42). Y entra a precisar qué se debe entender por expresión analítica, la que determina como serie infinita de potencias $A + Bz + Cz^2 + Dz^3$, pero no llega a determinar claramente si abarca las funciones trascendentes, o las obtenidas en el Cálculo Integral. De esta forma, la definición de función como expresión analítica fue aceptada por los matemáticos de la época.

Pero el problema de que a toda función le corresponde una curva y a toda línea curva también debía representarse por una función, y el sentido que Euler le daba a continuidad, “inmutabilidad de la ecuación, mientras que la discontinuidad significaba cambio de la ley analítica” (Youschkevitch, 1976, p. 46) junto con la solución al famoso problema de la física matemática conocido como “las vibraciones infinitamente pequeñas de una cuerda finita y homogénea, fijada en ambos extremos” va a determinar la mayor evolución del concepto.

La definición de Euler: le permitió argumentar que la expresión que representaba dicho movimiento no era una función



puesto que no estaba formada según una sola ley constante, el movimiento estaba conformado por una infinidad de expresiones analíticas distintas. Para precisar su argumentación

Euler en su curso de análisis (Introduction a l' Analyse Infinitesimale) introduce la noción de curva continua y discontinua afirmando: "Una linea continua es aquella cuya naturaleza es expresada por una sola función determinada de x ", y añade la condición "pero si una linea curva esta compuesta por diferentes porciones, determinadas por varias funciones de x , de modo que la curva total es el resultado de una función, la llamaremos discontinua o mixta, porque no esta formada según una sola ley constante y está compuesta de porciones de diferentes curvas continuas". Euler durante los diecisiete años que participó en la controversia que suscitó la solución del problema no cambió su punto de vista en cuanto a considerar que las funciones no estaban sujetas a la ley de la continuidad.

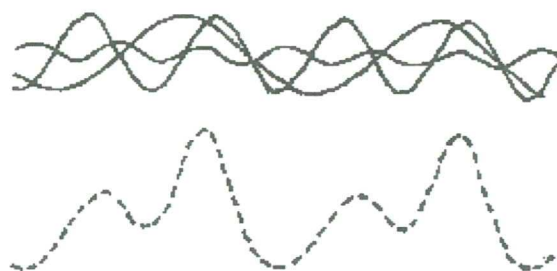
Este problema también estudiado por D' Alambert (1746) quien planteó la solución como "la suma de dos ondas que se desplazan en direcciones opuestas" (Davis y Hersh, 1988, p.191), y no aceptó como válida la propuesta de curva discontinua de Euler. El problema se centró en el análisis de la posición inicial de una parábola y sus desplazamientos, la cual es representada por una función impar y periódica, cuya solución viene dada por:

$$y(t, x) = A_1 \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi at}{l} + A_2 \sin \frac{2\pi x}{l} \cos \frac{2\pi at}{l} + A_3 \sin \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3\pi at}{l} + \dots$$

que corresponde a las soluciones dadas por Taylor. Bernoulli y Lagrange también llegaron a la solución anterior, pero Bernoulli consideraba que dichos desarrollos corresponden a las funciones continuas periódicas e impares, para Lagrange también estos desarrollos representaban las funciones discontinuas, mientras que para D' Alambert y Euler estas no eran las soluciones porque el desarrollo en serie trigonométrica de una función no pertenecía al análisis.

Es Fourier (hacia 1882) cuando publica su "Teoria Analitica del Calor" quien demuestra que las series trigonométricas existen en el análisis, independientemente de que provengan de una función continua o discontinua, pues afirma "los desarrollos de senos y cosenos múltiples poseen evidentemente toda la generalidad que comportan las funciones arbitrarias" independientemente

que provengan de una función continua y donde se puedan calcular los coeficientes de las series trigonométricas; introduce también la convergencia de las series como criterio para decidir si representan o no una función. El aporte de Fourier trae consigo la idea de función como correspondencia entre dos conjuntos de números independientemente de cómo esta correspondencia esté dada pero limitada por la idea de que la gráfica sea una curva continua. De esta forma, la variación periódica de ondas representadas por curvas del tipo de la figura 1, fue expresada en el teorema de Fourier como curva que puede ser obtenida por la adición de gráficas similares: (tomado de Davis y Herhs 1990, p.189)



y analíticamente como: $y = 7 \text{ sen } 200 t + 0.3 \text{ sen } 400 t + 0.4 \text{ sen } 600 t + \dots$

es decir se afirma que si y es función periódica del tiempo y se repite, entonces y tiene un desarrollo del tipo señalado. El avance logrado en el desarrollo del concepto de función es el logro de técnicas de análisis más amplias, pero abre una nueva problemática como el estudio de la continuidad. En lo referente al mismo concepto, fue Direlecht quién dio respetabilidad al teorema de Fourier al decir "no es necesario que y esté sujeta a una misma regla con respecto a x en la totalidad del intervalo" (Direlechet, citado por Davis y Hers, 1980 p. 197), pero aún el problema de la unicidad de la regla no queda establecido, aunque se especifica el problema de la correspondencia arbitraria, y abarca funciones continuas y no diferenciables.

En este mismo sentido y buscando la rigurosidad y un concepto más general Lobatchevsky (s. XIX) formula la siguiente definición "El concepto general exige que se denomine función de x a un número que esté dado para toda x y que cambie gradualmente junto con x . El valor de la función se puede dar, ya sea mediante una expresión analítica, o a través de una condición que ofrezca un medio para probar todos los números y seleccionar uno de ellos; o, finalmente, la dependencia puede existir, pero permanentemente desconocida" (Lobatchevsky, citado por Youschkevitch, 1976, p.68), con esta definición la existencia de la

función por la expresión analítica es abolida, pero desconoce la función constante.

La definición de Direlecht fue aceptada hasta que las corrientes del movimiento de los fundamentos (mediados del s. XX) de las matemáticas entraron a cuestionarla por diferentes motivos (Sierpiska 1992, p. 27). Para los constructivistas era necesario tener una regla para encontrar la y correspondiente a una x en momentos finitos, para los intuicionista la definición no era rigurosa. Era necesario introducir antes de la definición nociones primitivas nuevas. Es Peano quien propone reducir el concepto a la noción de relación, para ello define la relación unívoca y argumenta para demostrar que la noción de función puede ser reducida a ella. (Sierpiska, 1992, p.28), esta idea es aceptada por Russel y Whitehead, quienes desarrollan la Teoría de las Relaciones.

Posteriormente Huasdorff propone la idea de reducirla a par ordenado. Relacionando el par con dos objetos elegidos arbitrariamente. Finalmente hacia 1920, el concepto es introducido a la teoría de conjuntos, logrando su mayor generalización, lo que determina que todas las funciones definidas anteriormente sean solo casos particulares de esta definición, que se formula como "Dados dos conjuntos arbitrario A y B una función (o aplicación) de A en B es una ley que a cada elemento x de A hace corresponder un solo elemento de y de B " o sus equivalentes:

Una función f es una triada (X, Y, f) donde X & Y son conjuntos y f es un subconjunto de $X \times Y$ tal que si la pareja (x, y) pertenece a f y la pareja (x, y) pertenece a f entonces $y = y$.

Una función f de A en B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ tal que para cada elemento a de A hay un único elemento b de B tal que (a, b) esta en f .

II. 2 Aspectos didácticos

El concepto de función por su potencialidad y por estar presente desde los primeros años de escolaridad hasta su finalización, así como por su presencia en todos los bloques del currículo de matemáticas (Aritmética, Álgebra, Geometría, Cálculo) ha generado programas de investigación en educación matemática en varios países (EEUU, Inglaterra, México). Las investigaciones sobre este objeto incluyen desde el estudio de las concepciones de maestros, estudiantes, comprensión y adquisición, hasta la formulación de diseños didácticos para diferentes niveles de educación básica y universitaria.

Específicamente, estas investigaciones han aportado (Vinner y Dreyfus 1983; Markovits, 1986; Janvier 1986; Sierpinska 1992; Cotret 1985; Sfard 1992; Dibisnky 1992) para identificar los diferentes sistemas de representación y los diferentes procesos cognitivos por los cuales transcurre la comprensión del concepto. Particularmente los estudios sobre la evolución conceptual del concepto han redescubierto elementos que han estado presentes en su evolución y que están relacionados con las estrategias y modos de comprensión de los estudiantes.

Se ha identificado que las representaciones asociadas al concepto ponen de relieve diferentes aspectos, así como los distintos objetos que le subyacen. Así por ejemplo cuando el concepto se asocia con la noción de transformación, se ponen de relieve las relaciones entre dominio e imagen, puesto que centra la atención en el estado inicial y final, de aquí que didácticamente se construya una representación como la máquina para mostrar ostensivamente tal invariante. La noción de función como clase especial de relación, se asocia con la invariante unicidad de correspondencia, en consecuencia la representación asociada, diagrama sagital es de carácter estático. Por su parte cuando la noción se asocia con la idea de dependencia entre variables, tales invariantes son poco relevantes, pues lo que interesa es expresar fenómenos de cambio, modelar variaciones entre variables. De esta manera el privilegio de un sistema de representación crea significaciones restringidas del concepto, y oculta la riqueza y complejidad de su noción como objeto matemático.

Se han caracterizado dos perspectivas para analizar la comprensión: la perspectiva proceso y la perspectiva objeto. En la primera se considera que la función conecta los valores de x e y , es decir para cada valor de x , le corresponde un y . Desde la perspectiva objeto la función se asume global, definida dentro de una teoría.

Desde otro enfoque Sierpinska (1992) propone una teoría de la comprensión para el concepto de función y describe como operaciones mentales cuatro actos de comprensión: identificación, discriminación, generalización y síntesis. Estos están supeditados a los contextos (matemático o matematizado) pues son los que lo dotan de significados y al mismo tiempo privilegian invariantes del mismo (1992, p. 29). Sierpinska propone como condiciones para la comprensión de la noción función crear la consciencia de existencia de los mundos que cambian, de los procesos que dan lugar al cambio, de la identificación de las regularidades por las que se produce el cambio, y crear la consciencia de la asimetría entre los mundos que cambian (variable dependiente e independiente).

II.3 El problema de seleccionar una definición para la enseñanza

Una de las razones que lleva a la selección de una definición es la de ser coherente con los presupuestos por los que se incluye el concepto como contenido dentro del currículo escolar de matemáticas. Pero teniendo en cuenta la evolución conceptual de la función y los múltiples problemas a los que estuvo asociado, no es arriesgado afirmar, ni se podría desconocer que como contenido de enseñanza el concepto va a sufrir una reducción. Pero de otro lado, los contenidos matemáticos del currículo escolar, nos referimos aquí al currículo de la Educación Básica y Media Vocacional, no pueden estar en principio aislados de las otras áreas curriculares, especialmente del área de Ciencias (Biología, Física, Química). Además habría que añadir que la selección de la definición debería tener en cuenta las necesidades de formación de los estudiantes en la misma matemática, la matemática necesaria para su profesión, y como ciudadano.

Sobre esta primera razón para su selección cabría cuestionar si se puede establecer un criterio estándar para tomar la decisión frente a la gran variedad de versiones a que han dado lugar las elaboradas en su desarrollo conceptual. Según los aspectos que destacan las definiciones, se pueden clasificar en:

- Correspondencia entre valores de variables
- Correspondencia entre elementos de dos conjuntos
- Dependencia entre dos variables
- Conjunto de pares ordenados
- Relación entre dominio e imagen, estado inicial y estado final
- Cambio de la variable dependiente

En cada una de estas interpretaciones subyacen otros conceptos como relación, correspondencia variable, regla, pero también cada una coloca el acento en una invariante del concepto, y en un tipo de representación. El criterio, para elegir una definición que permita introducir el concepto a nivel elemental, debe ser entonces muy coherente con el currículo escolar de matemáticas.

III.1. Referente teórico del estudio: La transposición didáctica

La breve reseña histórica de los textos escolares permite concluir que, desde sus inicios su elaboración planteó la necesidad de simplificar con fines de enseñanza, el saber matemático, precedido de la identificación y designación de los contenidos del saber matemático como objetos necesarios para enseñar. Para Chevallard el conjunto de transformaciones que actúan sobre el objeto de saber para hacerlo objeto de enseñanza, lo convierten en una versión didáctica del primero porque las adaptaciones didácticas obedecen a necesidades de la enseñanza. A este proceso Chevallard lo denomina Transposición Didáctica, el cual es ineludible puesto que es un “proceso mediante el cual tiene lugar la acción de transponer un saber hacia un lugar didáctico” (Cantoral, R., 1.995, p. 6) para llevarlo al ámbito escolar. La intervención de variables características de la enseñanza determina modificaciones para los objetos matemáticos, es decir se pueden crear conceptos didácticos. Un ejemplo es el concepto de función como máquina o transformación.

En las adaptaciones didácticas también intervienen otras variables, tales como la ideología y reclamos de la sociedad, administración del tiempo institucional, y aún la presencia de recursos tecnológicos. Precisamente la tecnología con fines educativos (calculadoras, científicas, computadores) es hoy un recurso didáctico en las sociedades industrializadas. Su presencia ha llevado a generar nuevos referentes al concepto el de dependencia, y recuperar las aproximaciones numéricas para estudiar la variación.

La pregunta que surge es si ¿ Los tratamientos didácticos que sufren los contenidos del saber científico conllevan a que los saberes didácticos sean intrínsecamente diferentes de los primeros?. Para Chevallard la respuesta a este interrogante se tiene cuando se analizan las creaciones didácticas que se han dado en el marco de una reforma y en su posterior evolución. El análisis se enmarca en el estudio del tránsito entre

Objeto del saber matemático → Objeto matemático a enseñar → Objeto de enseñanza

Un ejemplo que es analizado por Chevallard y Freudenthal (1.973) y que también se da en nuestro sistema, son las creaciones didácticas surgidas en el marco de la Reforma de las Matemáticas Modernas, específicamente el paso de la Teoría de Conjuntos de las matemáticas a lo que Chevallard denomina *teoría de conjuntos de la escuela primaria* que produjo la creación de objetos de enseñanza como “el diagrama de Venn”. En el programa curricular para Primero de Primaria (1.984) el conjunto como objeto de enseñanza es descrito:

Utilizar la palabra conjunto para referirse a colecciones o a agrupaciones o montones de objetos	El alumno llamará conjunto a los objetos que estén juntos
--	---

(Programa curricular de Matemáticas para el grado primero de Primaria. MEN 1984, p. 60)

Como actividades metodológicas para el maestro, se sugiere que después de las múltiples actividades que se han realizado “ *los niños harán representaciones de conjuntos, para ello formarán conjuntos cuyos elementos sean los mismos niños y se trazará sobre el piso, con una tiza, una línea cerrada alrededor del conjunto* “ (MEN, 1984. p. 62), esta orientación ha sido seguida por los textos escolares para este grado, y el conjunto es identificado por el diagrama de Venn.

Los análisis de las adaptaciones didácticas que sufre el saber científico son necesarios en cuanto ponen en evidencia la distancia que se establece con el conocimiento científico, pues en la mayoría de los casos la transposición constituye objetos de enseñanza distintos a los objetos del saber. Desde esta teoría, surgen cuestionamientos de diversa índole para los profesores. Un primer cuestionamiento es establecer la responsabilidad y participación crítica en la construcción de las matemáticas escolares. Un segundo, es reconocer que no existe transparencia entre el saber matemático y el saber objeto de enseñanza, existe una distancia y es creada por un proceso de adaptación didáctica, en la cual se puede participar siempre y cuando se tenga el saber profesional característico. Estos cuestionamientos conllevan a una sensación de culpa “producir una verdadera resistencia, - semejante a la resistencia del psicoanálisis” (Chevallard 1.989) puesto que se toma consciencia de responsabilidades de carácter deontológico como la de renunciar a enseñar temas para los cuales no se tiene una satisfactoria transposición didáctica pues se requiere investigar “ buenas transposiciones para las demandas didácticas de la sociedad”. Para Chevallard esta hipótesis fundamenta la necesidad y legitima la didáctica de las matemáticas como campo científico.

El proceso de transposición se inicia bajo la influencia de movimientos ideológicos desde los cuales se configuran las selecciones de contenidos y métodos de enseñanza. Ruiz Higuera (1.994) describe este primer estadio como un *medio ambiente*, formado por profesores de matemáticas, matemáticos, educadores, diseñadores de currículos, padres de familia, industriales, etc. quienes se preocupan por la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas frente a las exigencias de la sociedad. Chevallard denomina a este medio ambiente , noosfera. Un ejemplo de la presencia de la noosfera es la divulgación

que hicieron los matemáticos franceses en los años 50, de los más recientes avances de la matemática logrados por la escuela Bourbaki., y como creando ambiente para la Reforma en Francia. En Estados Unidos, la carrera espacial, -lanzamiento del primer spunnik por parte de los soviéticos- se constituyó en la noosfera para implementar la reforma.

Desde este ambiente se designan los objetos a enseñar, los cuales se plasman en programas curriculares oficiales. En su transposición los objetos matemáticos sufren restricciones como delimitación, autonomización y programabilidad del aprendizaje. Estos a su vez cuando son traspuestos a los textos son organizados discursivamente. Los *objetos de enseñanza*, adquieren un carácter de objetivación y publicidad y además legalizan la “norma de progresión del conocimiento de los alumnos” (Chevellard citado por Ruiz Higuera, 1.994. p. 236).

III.2 Los fenómenos didácticos ligados al proceso de Transposición didáctica

El principal producto de la transposición es el saber didáctico consignado discursivamente en programas y textos. Estos designan públicamente los saberes enseñables y también los no enseñables. El proceso de adaptación esta regulado por exigencias como:

- Separación de las personas a las que estuvo ligado, de la globalidad y del sistema de relaciones y problemas de donde emergió, tal como lo muestra el desarrollo conceptual descrito en el capítulo II.
- La exigencia de dividirlo, fraccionarlo en campos de saber delimitados, lo que da lugar a prácticas de aprendizaje especializadas. En el caso del concepto de función el fraccionamiento ha llevado a situarlo en bloques de contenidos diferentes, en el bloque de las relaciones, por ser “ una relación especial”; se le asigna otro lugar en el bloque del álgebra y como objeto diferente en el bloque aritmético cuando se establece la proporcionalidad.
- La exigencia de definir una progresión ordenada en el tiempo lo que implica establecer una entrada en la materia y un fin, es decir, define el modelo a transmitir para el cual se puede llegar a “suponer un desarrollo progresivo acumulativo e irreversible” (Cantoral, 1995 p. 7); la progresión ordenada regula el tiempo de aprendizaje, el orden es creciente y lineal, de tipo $A \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots$

- Este orden de adquisición exige verificar la progresión del aprendizaje, lo que determina la evaluación.

Chevellard anota, que, sin embargo, la designación pública y legal de esta progresión tiende a convertir saberes que no son enseñados *jamás* en saberes que deben ser aprendidos sin esta legalidad. Para mostrar esta situación introduce categorías (nociones matemáticas, paramatemáticas y protomatemáticas) para analizar los objetos de enseñanza, su reconocimiento procede del estatus como objetos dentro del campo matemático, (concepto de función, la multiplicación, grupo, etc.) En la enseñanza se da un proceso de evolución de diferentes tipos, de los objetos matemáticos., por ejemplo cuando un objeto es definido con sus propiedades explicitándolas a través de definiciones o teoremas y es objeto de evaluación, el régimen didáctico lo denomina noción matemática. Pero también sucede que estas nociones se convierten en requisitos o preconceptos para otras nociones matemáticas. Esta conversión depende de factores como los niveles donde se introduzcan, pues para un nivel una noción puede ser noción matemática, mientras que en el siguiente es considerada como herramienta designada para la solución de problemas.

Al lado de los conocimientos que son objetos de enseñanza explícita, coexisten nociones que son herramientas de la actividad matemática, – “*paramatemáticas*” –, que no son enseñadas pero si deben ser aprendidas puesto que de su dominio y comprensión depende en gran parte las posibilidades de comprensión de nociones matemáticas, aunque no sean tratadas como objetos de enseñanza. Los principios de sustitución, y de generalización en el álgebra, son nociones paramatemáticas, pues cuando la enseñanza persigue sólo el reconocimiento de expresiones como $a^2 - b^2$, es imposible que el estudiante pueda resolver expresiones como: $(x + y)^2 - (x - y)^2$. Esta misma situación se da en el paso de la variable como incógnita (ecuaciones) a variable con significado dinámico (expresiones funcionales e inecuaciones). Las nociones paramatemáticas pueden convertirse en generadoras del fracaso del estudiante, en tanto la evaluación si puede llegar a revelar que es a esta herramienta a la que se debe que el estudiante no resuelva las tareas propuestas.

El sistema didáctico puede proponerse el desarrollo de capacidades características del pensamiento matemático – *nociones protomatemáticas*– definidas de manera explícita y general por los fines propuestos para la enseñanza como proyecto social; son expresadas como capacidades, comportamientos o competencias propias de la actividad matemática. No son tampoco objetos de enseñanza explícitos, se desarrollan a través de actividades

del estudiante y dependen de las situaciones didácticas. Si el proyecto de enseñanza busca desarrollar capacidades, el tiempo de aprendizaje y de enseñanza se extiende, se complejizan los objetos de la enseñanza, en tanto se ruptora la tradicional concepción de “un concepto queda aprendido por una única definición “ pues “ la capacidad de resolución de problemas, de descubrir patrones, de buscar datos apropiados.” depende de variadas situaciones didácticas, fundamentalmente del contrato didáctico el cual permitirá desarrollarlas en diversos contextos del saber matemático objeto de enseñanza” (Chevellard 1988). Un ejemplo de la presencia de estas nociones son los Estándares curriculares del National Council Teachers of Mathematics (NCTM).

Es esta la tendencia que se impulsa actualmente para la educación colombiana en general (Resolución No 2343, junio 5 de 1996, MEN) sin embargo su adopción no es tan fácil puesto que aún conviven factores que requieren redefiniciones drásticas a nivel teórico y práctico. Entre las primeras se destaca la necesidad de continuar rupturando la ilusión de transparencia entre el saber matemático y las matemáticas escolares. El saber profesional del maestro si bien es reconocido oficialmente (Ley 30) su asentamiento como disciplina académica en los centros de formación y actualización de profesores se debate aún con la yuxtaposición de saberes generales sobre pedagogía, didáctica y psicología.

La ausencia de estos factores, conduce de nuevo a correr el riesgo de asumir acriticamente la profundidad que implica el cambio oficialmente impuesto, puesto que la difusión de estándares curriculares como los del NCTM por ejemplo, o el uso de textos que institucionalizan este tipo cambios oculta los problemas de la educación matemática que requieren solución en el país. Pues tal como hemos descrito, los cambios son condensados de la sociedad, e involucran reflexiones sobre las matemáticas, sobre su actividad, sobre su epistemología.

Con los referentes teóricos descritos, nos basamos en la importancia de los programas y los textos como portadores y mediatizadores de concepciones institucionales. El análisis se realiza en los programas estudiando aspectos como: definición, diferentes representaciones asociadas y situaciones de empleo. En los textos escolares se analiza el proceso de adaptación, teniendo en cuenta las exigencias didácticas anotadas en parágrafos anteriores. Y se elabora un análisis de contenido (Weber, 1986) sobre:

- Modelo didáctico
- Definición
- Ejemplos propuestos
- Relaciones establecidas entre la función y los objetos matemáticos asociados.

III La función como objeto a enseñar: Programas oficiales

III.1 El programa de la década del 60

El programa describe el listado de temas, *para los cursos del Bachillerato*. La Aritmética, el Algebra y la Geometría se presentan como bloques separados. La primera se enseñaba en los cursos de primero a tercero de Bachillerato; en ella se inscriben las Proporciones y sus aplicaciones comerciales *tanto por ciento, interés, proporciones simples y compuestas* sin ninguna relación con la función de proporcionalidad directa o inversa.

El bloque de Algebra es propuesto para iniciar el tercero y continuar en cuarto de Bachillerato. El énfasis es la solución de ecuaciones lineales y cuadráticas desde el aspecto puramente sintáctico. A través de esta presentación la variable como incógnita adquiere un status de noción paramatemática. Aunque la noción de función aparece propuesta como tema para Tercero de Bachillerato, la presentación del programa es un listado de contenidos que no permite analizar su definición y ejemplos o ejercicios propuestos.

III.2 El programa oficial de la década del 70

El programa oficial de Matemáticas, expedido por el Ministerio de Educación Nacional, que rigió durante la década del 70, en general tiene la siguiente estructura en su presentación:

- Sugerencias didácticas.
- Objetivos generales.
- Programación por cursos.

En las sugerencias didácticas se afirma que *para un mejor planeamiento y desarrollo de los programas* se considera indispensable que los profesores hagan un detallado análisis de planteamientos como:

- El concepto de *enseñanza de la Matemática* ha sido sustituido en los últimos años por el de *Educación Matemática* entendida ésta, como *adquisición por parte del educando, de una conceptualización básica y hábitos matemáticos que le permitan reaccionar adecuadamente ante un problema: descubriendo relaciones y propiedades, o reconociendo estructuras matemáticas que lo lleven a posibles soluciones.* (Programas Oficiales de Matemáticas 1974, MEN, página 219).
- Los buenos hábitos matemáticos que posea una persona deben entenderse como tener la capacidad de *abstraer, generalizar, analizar hipótesis, transformar problemas conservando la estructura, seguir una línea de razonamiento,*

solucionar problemas, reconocer modelos, encontrar relaciones entre estructuras, seguir una demostración y criticarla.

- La necesidad de una respuesta a los grandes desafíos de los cambios científicos y tecnológicos hace fundamental que el proceso educativo sea *más flexible y permanentemente adecuado*. Se necesita educar para el futuro puesto que *educar para hoy es ya educar para el pasado*.
- La esencia de la nueva pedagogía de la enseñanza de las matemáticas es *que el estudiante, por participación actual y envolvente, entre en el proceso de la construcción de la matemática*.
- Se critica la actividad tradicional del estudiante puesto que se ha reducido a *aceptar una matemática en la que todo está hecho, rígida, estricta y fría, solamente aquellos con dotes excepcionales logran captarla*.

Parecería que se plantean reflexiones fundamentales en términos de pasar de una *enseñanza de la matemática* a una *Educación matemática*. En contraste con el programa de la década anterior, se observa que los objetivos de enseñanza deben responder a objetivos sociales y científicos. Sin embargo estos últimos fueron determinados por la matemática universitaria, ya que uno de los fines con que en Norteamérica se impulsó la reforma fue *la de formar rápidamente estudiantes cuyos conocimientos matemáticos estuvieran a la altura de la nueva tecnología de la era espacial*. Resnick (1981, p. 181).

La inclusión de la Educación Matemática dentro del programa y los planteamientos propuestos para reflexión de los maestros es una versión sintetizada de lo que entonces se establecía como Educación Matemática: *delimitación de un nuevo núcleo de la enseñanza de la matemática que incluya las ideas básicas y técnicas más importantes de la matemática moderna; organizar la enseñanza de las materias de este núcleo fundamental en un programa bien concebido que no deje de tener en cuenta las aportaciones de la psicología moderna*. (Stone, 1978, p. 91).

Particularmente este aporte se va a sustentar en el trabajo de Piaget sobre el razonamiento lógico matemático, publicado en 1968 del cual se desprenden ideas como que la comprensión real supone la reinversión por parte del sujeto, comprender en acción mucho más que verbalmente; o la introducción del problema como medio de aprendizaje, en tanto el conocimiento es el resultado de la interacción sujeto-medio, es decir de la acción del sujeto con una finalidad propia: dar respuesta a un problema.

Los objetivos generales se refieren a una formación personal para desarrollar:

- *Habilidades, destrezas para plantear y resolver problemas prácticos que admitan la aplicación de modelos matemáticos.*

- *Aptitudes para entender un evento nuevo que se presenta o expone. La capacidad para asimilar estructuras abstractas, retomar lógicamente y valorar los datos intuitivos y empíricos por medio del rigor de la crítica y del razonamiento científico.*

De lo anterior se desprende que desde el punto de vista de la formación personal se debe ser capaz de plantear y solucionar problemas a través de la modelización. La formación social se propone como :*Los medios y recursos matemáticos para participar en el proceso científico y cultural del país. La disminución de la actitud egocentrista en favor de una actitud cooperativa.*

Se solicita a los profesores fortalecer el trabajo en grupo para lograr el intercambio de conocimientos, la discusión de las diferentes posturas y la contrastación de las propias. Como objetivos específicos para el aprendizaje se propone :un lenguaje y simbolismo que permita:

- *Solucionar los problemas que presente cualquier rama de la ciencia.*
- *Manejar instrumentos de medida, de cálculo y de presentación gráfica, para comprender el mundo en que vive.*

En el campo del lenguaje se pretende la capacidad de solucionarle cualquier problema de la ciencia,. lo que es incoherente con la formación social propuesta. También se integran objetivos referidos a la aptitud vocacional de los estudiantes como : *Una exploración vocacional que le lleve a desarrollar sus aptitudes para las matemáticas.*

En cuanto a la programación por cursos, se fijan temas que se desarrollan a través de unidades con sus respectivos objetivos específicos. Las siguientes tablas describen los objetivos específicos y contenidos relacionados con el concepto función

CURSO I ARITMETICA Y GEOMETRIA	
Objetivos específicos	Contenidos
Unidad II	Unidad II
-Identificación de función como relación especial	-Concepto de aplicación o función. -Clases de funciones: Inyectiva, suryectiva, biyectiva

CURSO II ARITMETICA Y GEOMETRIA	
Objetivos específicos	Contenidos
Unidad IV -Que adquiera el concepto de volumen como una función	Unidad IV -Definir en términos elementales el concepto de función de conjunto. - Definir el volumen como una función de conjunto V, definida en una clase de conjuntos en el espacio de tres dimensiones, es decir los sólidos.

CURSO III ALGEBRA Y GEOMETRIA	
Objetivos específicos	Contenidos
Unidad II -Identificar cuándo una representación sagital o cartesiana corresponde a una relación, función o aplicación. -Hallar con precisión la inversa de una función y la compuesta de dos funciones	Unidad II - Función. Aplicación. Suryección. Inyección. Biyección. Composición de funciones.

CURSO IV ALGEBRA Y GEOMETRIA	
Objetivos específicos	Contenidos
Unidad II -Que distinga la manera como puede visualizarse cualquier función. Unidad VII -Que distinga la relación existente entre	Unidad II -Noción de función lineal y la representación gráfica. Ejemplos: Ilustrativos y ejercicios de práctica. Unidad VII

potenciación y logaritmación.	-Definición de la ecuación funcional. Potencias de 10. - $\log N = x \rightarrow a^x = N$
-------------------------------	---

CURSO V. GEOMETRIA ANALITICA, TRIGONOMETRIA	
Objetivos Específicos	Contenidos
Unidad VI - Analizar correctamente una función polinómica. - Hallar correctamente los ceros de una función polinómica: - Utilizar adecuadamente el simbolismo matemático en los enunciados sobre funciones polinómicas: - Trazar correctamente gráficas de funciones polinómicas: - Hacer la discusión analítica de las funciones trigonométricas: - Interpretarlas gráficamente: - Graficar correctamente las funciones trigonométricas: - Efectuar correctamente dilataciones, contracciones, rotaciones, simetrías, y cizallamientos, aplicando los conceptos estudiados sobre vectores y matrices: - Hacer el correcto análisis de las transformaciones lineales estudiadas: - Ampliar el concepto de función al de función de probabilidad: - Dar ejemplos de funciones de conjunto:	Unidad VI - Operaciones entre las funciones polinómicas. - Determinación de los ceros de las funciones polinómicas. - Gráficas de funciones polinómicas. Unidad VII - Funciones trigonométricas: seno, tangente y secante definidas sobre $\mathbb{R}$. Representaciones gráficas. - manejo de las tablas de funciones trigonométricas. Unidad IX - Funciones y transformaciones geométricas: - Factor de dilatación - Traslación - Simetría - Rotación - Cizallamiento - Transformaciones lineales: Multiplicación o composición de dos transformaciones - Interpretación gráfica de transformaciones lineales en el plano:

	Unidad XI – Funciones de conjunto para familias de partes de un conjunto: – Función probabilística. Concepto y propiedades.
--	---

CURSO VI. ANALISIS MATEMATICO	
Objetivos Específicos	Contenidos
Unidad II – Se familiarice con el concepto de función y su caso más general, el de relación; ésta última como subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: – Se inicie en el estudio del concepto moderno de función como punto de partida para la solución de innumerables problemas planteados en las diferentes ramas de la ciencia: – Note el progreso que ha habido en el concepto de función, desde Leibniz, que la concebía para designar una fórmula matemática, hasta que tiene en la actualidad:	Unidad II – Concepto de función como caso particular de relación”. – Elementos de una función: – Método gráfico para saber cuando una relación es funcional. – Diferentes clases de funciones: Inyectiva, suryectiva, biyectiva, etc. – Inverso de una función. Condición para que el inverso de una función sea una función: – Método gráfico para saber cuando el inverso de una función es otra función. – $y = f(x)$ como el valor de la función en x, punto del dominio de f^a. – Algebra de funciones. Unidad III – El concepto de límite funcional. – Propiedades elementales de los límites funcionales. – Definición intuitiva del concepto de continuidad de una función en un punto.

	Unidad IV – Derivada de una función. – Derivadas para las funciones trigonométricas – Regla de la cadena para derivar. – Funciones compuestas: – Derivada de la función logarítmica: – Derivada de la función exponencial. – Aplicación de la derivada para cálculo de valores extremo de funciones: – Derivada de las funciones trigonométricas inversas. Unidad V – Particiones y funciones escalonadas: - Definición de la integral de una función escalonada.
--	---

Sólo para el curso VI se proponen *actividades de aprendizaje* cuyo objetivo parecería ser el de sugerir al maestro una didáctica para el aprendizaje. Con sugerencias como : *Con abundantes gráficos ilustrar a los estudiantes en forma intuitiva el concepto de función en general, el concepto en general, el concepto de función inyectiva, el de función suryectiva y finalmente el de función biyectiva*, pero como se deduce esta orientada hacia lograr mejores formas de la enseñanza.

De la revisión del programa se deduce que hay un desglosamiento, en principio, de los contenidos en grandes bloques (Aritmética, Geometría, Álgebra, etc.) con lo cual se satisface la exigencia de delimitación del saber: y programabilidad del saber. El objeto función se ennoblece como noción matemática pues en todos los cursos está presente. Además no parecería existir ninguna diferencia en el nivel de abstracción del ni tampoco en su evolución puesto que se repiten objetivos y habilidades en los fierentes cursos como es el obetivo señalado para el curso I y VI *se debe lograr que el alumno identifique "función como relación especial", "familiarizarse con el concepto de función y su caso más general, el de relación".* Las representaciones asociadas son la sagital, cartesiana y la *fórmula matemática*.

IV. El objeto función como objeto de enseñanza: Textos escolares, década del 60

IV.1 Los textos de la década del 60: Baldor

Los textos escolares de las décadas del 60 específicamente el Álgebra de Baldor, introdujo una transformación en cuanto al álgebra escolar; pues el manejo sintáctico de su lenguaje propició *cierto rango de distinción* entre estudiantes y profesores. El status como noción matemática de la factorización y sus casos asociados fue considerado como signo evidente de capacidad matemática, pero sin lugar a dudas el texto de Baldor tiene aún una sobrevivencia institucional tanto en estudiantes como en profesores. Ello es particularmente evidente pues su decimasegunda edición circula actualmente en las aulas de matemáticas

Los textos *Aritmética teórico práctica* y fueron los más utilizados durante la década del 60 el primero se utilizaban en los cursos I y II (en la actualidad sexto y séptimo) mientras que el Álgebra se usaba en los cursos III y IV (en la actualidad octavo y noveno).

IV.2 Modelo didáctico

La tendencia didáctica parece ajustarse a un modelo teoría y práctica pero con la salvedad que siempre le preceden a la definición ejemplos inscritos en contextos de dependencia, buscando inducir una aproximación a la definición, metodología que se repite después de formulada la definición con ejemplos que se proponen en los cuales se ratifica la exposición de los invariantes asociados en la definición al concepto.

IV. 3 Definiciones presentadas

Las definiciones en el texto de Aritmética y de Álgebra son atribuidas a Cauchy:

“Se dice que y es una función de x cuando a cada valor de la variable x corresponden uno o varios valores determinados de la variable y ”

(Baldor, Aritmética, p. 518 y Álgebra p. 283)

En la Aritmética antes de la definición anterior escribe: *Siempre que una cantidad variable depende de otra se dice que es función de esta última.*

Puede observarse que no hay referencia a conjuntos numéricos, el término “cantidad variable”, se identifica con la noción de variable, “cantidad variable que

depende de otra” con variable dependiente o función. Además esta “definición” enfatiza la característica de dependencia.

La concepción de función es análoga a la que tenían los matemáticos de principio del siglo XIX, la referencia a cantidades variables obedece a que en esta época aún no se había construido rigurosamente la teoría de los números reales, resalta en esta definición la presencia de la variabilidad como invariante asociado al objeto función. En estos textos las nociones aún no sufren el género de la despersonalización y descontextualización en relación al campo de problemas de donde surgió puesto que los ejemplos propuestos guardando la debida distancia están inscritos en escenarios que conservan la idea de dependencia de cantidades.

Esta presentación contrasta con la modificación radical y profunda que sufrió el concepto bajo la influencia de la *nueva matemática* tal como se describe en el siguiente capítulo. La despersonalización y descontextualización; de la definición *aplicación*, la hace aparecer libre de todo el proceso de gestación en el cual se inscribió la pérdida de invariantes como dependencia, variabilidad, características dinámicas del concepto la transforma en una definición estática poniendo en duda su utilidad y sentido como noción matemática

IV.4 Ejemplos

En los ejemplos de Funciones Aritméticas siempre se relacionan dos magnitudes dependientes: costo – superficie, trabajo realizado – tiempo, interés – tanto por ciento; tiempo – obreros, salario – tiempo. En los ejemplos sobre funciones geométricas se introducen las expresiones funcionales tipo:

- $A = f(b, h)$, la se traduce como el área de un rectángulo es función de la base y de la altura.
- $A = f(d)$, el área de un cuadrado es función de su diagonal.
- $V = f(l, a, h)$, el volumen es función del largo, ancho y de la altura.

Los ejemplos, tanto de funciones aritméticas como geométricas, refuerzan la definición de dependencia.

En el texto de Álgebra, retoma los ejemplos dados en la Aritmética y puntualiza en la existencia de función de una variable independiente y de varias variables. Los ejemplos se clasifican según se pueda o no establecer matemáticamente la ley de dependencia, denominándolas: Funciones analíticas y Funciones concretas. La diferencia entre uno y otro tipo de función parece ser la posibilidad de establecer *la relación analítica* que expresa la dependencia. En las funciones analíticas se proponen tres ejemplos:

- *El costo de una pieza de tela, función del número de metros de la pieza. Conocido el costo de un metro, puede calcularse el costo de cualquier número de metros.*
- *El tiempo empleado en hacer una obra, función del número de obreros. Conocido el tiempo que emplea cierto número de obreros en hacer la obra, puede calcularse el tiempo que emplearía cualquier otro número de obreros en hacerla.*
- *El espacio que recorre un cuerpo en su caída libre desde cierta altura, función del tiempo. Conocido el tiempo que emplea en caer un móvil, puede calcularse el espacio recorrido.*

Las funciones concretas se ejemplifican en escenarios como :

- *La velocidad de un cuerpo que se desliza sobre otro... al aumentar el roce disminuye la velocidad, pero no se conoce de un modo preciso la relación analítica que liga a estas variables.*

La propuesta de Baldor coincide con algunos elementos señalados por Sierpinski (1990) que ayudan a la comprensión del concepto de función como: iniciación en el estudio de los mundos que cambian ; presentación como herramienta en la modelación de ciertas situaciones de la vida real o de la ciencia ; utilización del lenguaje retórico ; presentación de situaciones de aprendizaje en contextos que dieron origen a la noción de función.

IV.5 Objetos relacionados

En la Aritmética, Baldor presenta las definiciones de magnitudes proporcionales, magnitudes directa e inversamente proporcionales, razón de proporcionalidad, razón directa e inversa y modos de formar proporciones. Mientras que en el Álgebra enuncia las definiciones de variación directa e inversa y variación conjunta

Las representaciones privilegiadas son a las tablas en : el texto de Aritmética , las que son descritas en enunciados como.

- “Si un móvil tiene una velocidad constante de 6 m/s, el espacio que recorrerá depende del tiempo que esté andando. Si anda dos segundos, recorrerá un espacio de 12 m.; si anda durante 5 segundos, recorrerá un espacio de 30 m.....”
- “Si un metro de tela cuesta \$2, el costo de una pieza de tela dependerá del número de metros que tenga la pieza. Si la pieza tiene 5 m., el costo será \$10; si tiene 8 m., El costo será \$16....”
- “Si una cuadrilla de obreros puede hacer en 4 días 20 m. de una obra, en 8 días (doble número de días) hará 40 m. de la misma obra (doble número de metros), en 2 días (la mitad del número de días) hará 10 m. (la mitad del número de metros)...”

También utiliza representaciones análogas a la simbólica como:

$$\begin{aligned}
\text{Costo} &= f(\text{superficie}) \\
\text{Trabajo realizado} &= f(\text{tiempo}) \\
I &= f(r) \\
\text{Salario} &= f(\text{tiempo}). \\
A &= f(b, h) \\
A &= f(d) \\
A &= f(R) \\
V &= f(a, l, h)
\end{aligned}$$

En el texto de Algebra presenta primero una introducción al sistema rectangular de coordenadas cartesianas: abscisa y ordenada, signo de las coordenadas y determinación de un punto por sus coordenadas. Luego se trabaja sobre la representación gráfica determinando procedimiento como *partir de la ecuación, dando valores a x se obtiene una serie de valores correspondientes a y y después representar los valores de x como abscisas y los valores correspondientes de y como ordenadas luego se ubican en un sistema rectangular de coordenadas*. Es decir, n sigue el modelo: Ecuación – Tabla – Gráfica.

Repitiendo este modelo, se grafican algunas funciones de segundo grado. como: $y=x^2$; $x^2+y^2=16$; $9x^2+25y^2=225$ y $xy=5$. Se enfatiza en el nombre de la curva geométrica correspondiente: parábola, círculo, elipse e hipérbola. En las tablas numéricas se hace énfasis en la variación de x y y . En las tablas del círculo y elipse solo se utilizan números enteros, mientras que en las otras da valores como $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, etc., y se hace explícito *que se puede seguir hasta $\pm \infty$* . El siguiente ejemplos muestra esta forma de inducir al "infinito": y de construir la tabla correspondiente a cada cuadrante

"Gráfico de $xy = 5$, o $y = \frac{5}{x}$.

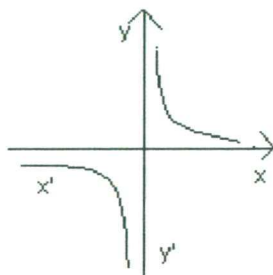
Dando a x valores positivos, tendremos

x	0	1/2	1	2	3	4	5	6	7	8		$\pm \infty$
y	$\pm \infty$	10	5	2.5	1.6	1.25	1	0.8	0.7	0.6	...	0

Luego se presenta la tabla asignando a x valores *negativos*.

x	0	- 1/2	-1	-2	-3	-4	-5	-6	- 7	- 8	...	$\pm \infty$
y	$\pm \infty$	- 10	- 5	- 2.5	- 1.6	- 1.25	- 1	- 0.8	- 0.7	- 0.6	...	0

Se repite la sugerencia para construir la curva en el tercer cuadrante. Finalmente construye la gráfica:



IV.6 Ejercicios y problemas propuestos

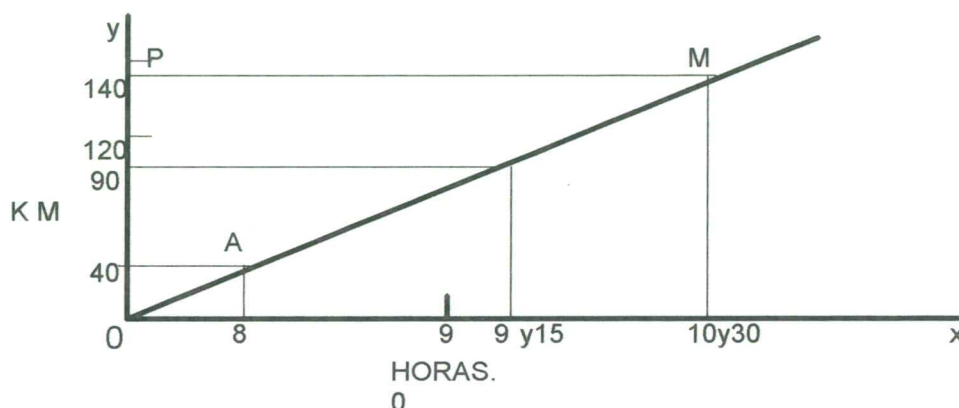
En la Aritmética no hay ejercicios ni problemas propuestos relativos a función. En el Álgebra hay 18 ejercicios para encontrar la fórmula de la función; los ejercicios referente a la representación gráfica (44) son: desglosados en: 8 para la representación de ecuaciones del tipo $ax + by + c = 0$; 18 para representar funciones tipo $y = ax + b$. Para graficar curvas (elipses, parábolas, círculos, hipérbolas) se proponen 14 ejercicios. Luego se proponen enunciados verbales como:

- *Espacio recorrido por un móvil (movimiento uniforme) es proporcional al producto de la velocidad por el tiempo. Escriba la fórmula que expresa el espacio l en función de la velocidad v y el tiempo t . ($k=1$).*
- *Escribir la fórmula de una función y sabiendo que para cada valor de la variable independiente x corresponde un valor de la función que es el duplo del valor de x aumentado en 3.*
- *La energía cinética de un cuerpo w es proporcional al producto de la masa m por el cuadrado de la velocidad v . Expresar la fórmula de la energía cinética ($k = \frac{1}{2}$).*
- *A es proporcional a B e inversamente proporcional a C. Cuando $B=24$ y $C=4$, $A=3$. Hallar la fórmula que expresa A en función de B y C.*

Puede concluirse que con los ejercicios iniciales, del texto de Álgebra, se busca encontrar la fórmula en situaciones particulares. No hay preguntas referidas a la interpretación de gráficas, ni sobre conceptos como creciente, decreciente. Sin embargo en un capítulo denominado: *Gráficas. Aplicaciones prácticas*, se propone el estudio de la utilidad de los gráficos. Cuya actividad esta determinada por la interpretación. Un ejemplo de algunos propuestos es:

- *Un obrero gana \$2 por hora. Hallar la gráfica del salario en función del tiempo.*

- Sabiendo que 15 dólares equivalen a 225 sucres, formar una tabla que permita convertir dólares en sucres y viceversa.
- Un tren que va a 40 km. por hora sale de un punto O a las 7am. Construir una gráfica que permita hallar a qué distancia se halla del punto de partida en cualquier momento y a qué hora llegará al punto P situado a 140 km. de O.

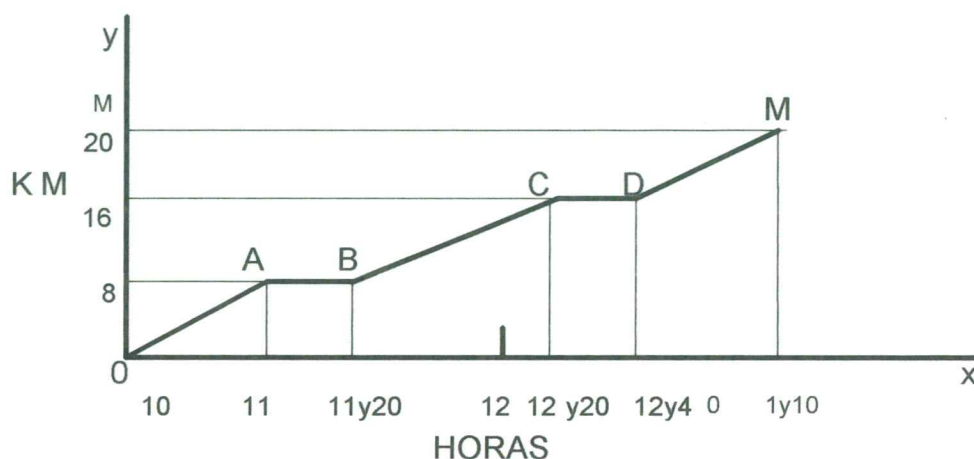


Aunque el autor presenta la gráfica ya construida, una interpretación nos permite ver que:

- Al punto O se le hace corresponder la hora 7 am. Como la velocidad es de 40 km. por hora, hasta las 8 am. ha recorrido 40 km. (puesto que ha transcurrido una hora). Luego parecería querer mostrar ¿Cuánto recorre 2 horas, 15 minutos? puesto que ubica 9 y 15 haciéndole corresponder 90 km.
- La interpretación permite deducir que los 140 km. en el eje y se desplaza horizontalmente hasta encontrar la gráfica y luego baja a encontrar la abcisa 10 y 30.

En otros problemas solo se pide elaborar una tabla.

- Un hombre sale de O hacia M, situado a 20 km. de O a las 10 am. Y va a 8 km. por hora. Cada vez que anda una hora, se detiene 20 minutos para descansar. Hallar gráficamente a qué hora llegará a M.



Puede observarse que se utiliza el eje y trasladado, se trabaja con una función a trozos conformada por “pedazos” de lineal, afines y funciones constantes. Para esta sección se proponen 14 ejercicios similares donde se enfatiza *Construya la gráfica. y halle gráficamente.*

El uso por parte del maestro de este tipo de situaciones implica primero una interpretación y comprensión que de suyo es compleja si se tiene en cuenta que en la década del 60. no se trabajaba con las representaciones gráficas. Pero sin lugar a dudas puede afirmarse que con este tipo de problemas, el texto de Baldor se adelantó a la importancia que hoy la investigación sobre las funciones, (Dubinsky, Harel 1990; Demana 1993) otorga a la gráfica para representar y solucionar situaciones problema en donde la función es la herramienta matemática.

Esta presentación va a ser totalmente desplazada en los textos de la década del 70 en tanto allí es asumida como una colección de parejas ordenadas que cumplen la invariante de unicidad de la correspondencia, en consecuencia el escenario que se privilegia es el producto cartesiano de conjuntos $A \times B$, o de $R \times R$, o la gráfica como fin de sí misma.

V. Los textos de la década del 70

La serie Matemática Moderna Estructurada (MME) fue la encargada de legitimar y objetivar la matemática moderna para lo que entonces se designaba el Bachillerato (hoy Educación Básica Secundaria y Media Vocacional); al contrario de los textos de la década del 60, para cada grado se elaboró un solo libro, el cual presenta en unidades los temas referentes a la Aritmética, Geometría, Algebra y Cálculo. Los cambios que introdujo se inscriben en el marco característico de la matemática moderna, interpretación deductiva de la matemática, lenguaje conjuntista, simbología, terminología abstracta y la matemática por la matemática; los contenidos tradicionales (Aritmética, Geometría, Algebra) fueron ajustados a los cánones del modelo, pero también se introdujeron nuevos contenidos, tales como función, estructuras algebraicas y nociones del Cálculo diferencial e integral.

La interpretación deductiva de la matemática es fiel en la serie a los objetivos propuestos en el programa para la década del 70, cada tema sigue una secuencia tipo: definición, notación simbólica – axiomas, si son necesarios – y se demuestran en forma deductiva las conclusiones, teoremas. Coherente con esta presentación, se priorizan las representaciones analíticas y diagramáticas para preservar las componentes de representaciones proposicionales; todos los temas se describen en lenguaje conjuntista. Para resaltar la importancia de este tipo de lenguaje, la serie está escrita en tinta negra y roja; con la primera se escriben enunciados proposicionales, por ejemplo la definición de *Aplicaciones idénticas* se escribe en tinta negra:

“Para un conjunto A , la aplicación más sencilla que se puede construir con A como dominio y codominio, es aquella que asigna a cada elemento de A el mismo elemento, dicha aplicación se denomina aplicación identidad en A o simplemente identidad en A , se acostumbra a denotar i_a ; Enseguida se transcribe en tinta roja la notación simbólica: “ $i_a : A \rightarrow A$ se define por $i_A(x) = x, \forall x \in A$ ” (MMNE, 3, 1976, p. 70).

La terminología nueva (*aplicación o función, funciones sobreyectivas o suryectivas.....*) y el simbolismo asociado, convirtió a la matemática en un conocimiento distante de los conocimientos sociales de estudiantes y padres de familia y del conocimiento matemático que tenían una gran mayoría de profesores.

El concepto de función se ennoblece al adquirir el status de noción matemática, comienza a ser introducida desde el grado primero, pero su definición formal con los objetos asociados se presenta en tercero y vuelve a retomarse en sexto de

bachillerato. En razón a que es en estos dos grados es donde el concepto adquiere su estatus, el análisis se realiza en los textos 3, 4 y 6.

En el grado tercero, la unidad 4, es dedicada a las *Relaciones y Funciones*, después de haber definido la relación, y los objetos asociados – dominio, codominio y representaciones – se presenta la definición de *función o aplicación* para enseguida y en el mismo orden en que son descritos los objetos asociados a la relación, presentar las definiciones de *dominio e imagen de una aplicación, imagen de un elemento, gráfica de una aplicación*. Se definen también clases de aplicaciones (sobre o suryecciones; uno a uno o inyecciones, biyecciones; composición y las aplicaciones identidad y constante). En otra unidad se definen aplicaciones o funciones numéricas, para seguidamente definir funciones polinómicas.

En el grado cuarto, las funciones lineales y cuadráticas se presentan en el bloque correspondiente al Álgebra, específicamente bajo los títulos *Los Sistemas de Ecuaciones de primer grado* y en el *Sistema de radicales y Ecuaciones Cuadráticas*. Otra unidad se dedica al estudio de la *Función Exponencial y Logarítmica*.

En el grado sexto, en una unidad dedicada de nuevo a las *Funciones* (7) se define el concepto y se asocian los siguientes objetos: *elementos de una función; imagen de un elemento; imagen de un conjunto; imagen inversa de un elemento; imagen inversa de un conjunto; algunas formas de presentar las funciones; gráfica de una función*, además de definir clases de funciones – *funciones uno a uno o funciones inyectivas; funciones sobre o funciones suryectivas; correspondencias uno a uno o funciones biyectivas* – se definen de nuevo *funciones reales y el álgebra de funciones*. Cuando se definen las funciones reales, se presentan como ejemplos la *función identidad, función valor absoluto y función parte entera*. En la unidad denominada *Cálculo diferencial*, se propone: *Estudio de la derivada de una función*, introduciendo, sin definirla, la noción de función como dependencia, *existencia y continuidad de una función; derivada de sumas, productos y cocientes de funciones; derivada de funciones trigonométricas y sus inversas; derivada de la función exponencial y de la función logarítmica*. Se incluyen también *las Segundas derivadas y derivada de orden superior de una función*. Para abordar la *Derivada en el trazado de gráficas* se define: *función creciente, decreciente, máximos y mínimos; Teorema de Rolle y Teorema del Valor Medio*. En el capítulo *Cálculo integral* de nuevo se presenta la función, esta vez asociada a las particiones – *Particiones y Funciones* – con el fin de introducir la definición de Integral de Riemann.

En ésta, se nombran los matemáticos y “científicos” que estudiaron conceptos y notaciones, la derivada por parte de I. Newton; la notación f' de Lagrange; la notación $\frac{dy}{dx}$ de Leibniz; Df , de Abogast. En la interpretación geométrica, la derivada se describe: “el problema que permitió el desarrollo del cálculo diferencial planteaba la forma de determinar la dirección de la recta tangente a una curva en un punto dado. Al matemático francés P. De Fermat se le debe la solución de dicho problema” (MME, 6, 1976, p. 164). Este estilo de historiografía, puede interpretarse como la fidelidad de los autores al programa oficial, pues es precisamente en el Cálculo, cuando el programa incorpora hechos históricos.

Una lectura superficial del listado de contenidos permite identificar que los cambios en los términos, en las definiciones y objetos asociados a la función para cada grado – en tercero aplicación o función, en sexto función y funciones reales – se debe a las necesidades de buscar las conexiones con los escenarios donde se define el concepto. Por ejemplo en tercero, la función como clase especial de relación y los preconceptos descritos, solo requiere mostrarla como una aplicación de la teoría de las relaciones, mientras que en sexto se necesita definir sobre el conjunto de los reales, calcular sus valores y conocer la regla, con estos argumentos se explica la introducción del lenguaje algebraico.

En este mismo año circula un texto denominado Algebra y Geometría para el curso cuarto en el que en su introducción se afirma “Contiene el desarrollo de los programas vigentes del Ministerio de Educación Nacional, decreto 080 de 1974, Resolución No 277 de 1975”, sin embargo la presentación de los contenidos para el curso no sigue la orientación de las matemáticas modernas, puesto que el lenguaje conjuntista, la simbología y los demás aspectos que caracterizaron su presentación no son asumidos por los autores. Lo que se puede interpretar como moderno es la presentación de una unidad denominada *Lógica Matemática*, donde se condensan contenidos como *conjunción*, *disyunción*, *cuantificadores*, *demostración indirecta*, etc, con temas de la teoría de conjuntos.

– *conjuntos unitarios*, *universal relaciones de inclusión*, *operaciones entre conjuntos*, etc. –.

La unidad II, denominada Sistemas de Ecuaciones, se inicia con el concepto de función asociada a la noción de dependencia y a la de cantidad muy el estilo de la concepción propuesta por Euler en 1755. La serie no tuvo una gran circulación en las escuelas secundarias de la época. A continuación describimos los resultados del análisis siguiendo el modelo propuesto (Ver Cap.II Referentes teóricos).

V.1 Modelo didáctico

Al contrastar la presentación de los contenidos con los ejercicios y problemas propuestos se deduce que el modelo didáctico se ajusta perfectamente al modelo teoría $\rightarrow$ práctica, pues primero se presentan siempre las nociones matemáticas, unas veces proposicionalmente, otras en representaciones diagramáticas, seguidas de ejercicios sin ningún tipo de transformación y sin exigencia alguna de interpretación por parte del estudiante. Lo que permite inferir que el único fin es que el alumno retenga las definiciones. Los ejercicios se ofrecen como forma de ejercitar las notaciones correspondientes a cada definición o a su reconocimiento. La secuencialidad de los contenidos se ajusta a las exigencias de programabilidad lineal de la enseñanza.

V.2. Definiciones

El concepto de función es presentado en toda su generalidad, bajo la versión de aplicación formulada a finales del siglo XIX. Pero tanto su nombre, como las notaciones cambian del grado tercero hasta al grado sexto y aún dentro de un mismo grado como se puede observar en la tabla siguiente:

Grado tercero	Grado sexto
<i>“ Unidad II Relaciones y funciones: Se llama aplicación o función de un conjunto A en un conjunto B a toda relación de A en B que cumpla la condición:</i> <i>Para cada elemento $x \in A$, existe un elemento $y \in B$ y sólo uno tal que xRy</i> <i>Notación: Si R es una relación de A en B que es una aplicación se acostumbra a denotarla :</i> <i>$f: A \rightarrow B$ o también $A \xrightarrow{f} B$ que leemos f es una aplicación de A en B” (MME 3, 1976, p. 61).</i>	<i>“Unidad 7 Función: Se llama función de un conjunto X en un conjunto Y (no vacíos) a toda relación R de X en Y que cumple la condición: para cada elemento $x \in X$ existe un único $y \in Y$ tal que xRy</i> <i>En forma equivalente podemos decir que una función f definida de un conjunto X en un conjunto Y (no vacíos) es una relación R de X en Y tal que para todo $x \in X$ no existen dos parejas ordenadas de $X \times Y$ en el conjunto solución de R que tengan a x como primera componente.</i> <i>Notación: Si R es una relación de un conjunto X en un conjunto Y (no necesariamente distintos) que es una función se acostumbra a denotarla $f: X \rightarrow Y$ que leemos f es una función de X en Y” (MME 6, 1976, p96).</i>

<i>“Unidad VI: Polinomios: Aplicaciones o funciones numéricas: Una aplicación f definida de un conjunto X a un conjunto Y se llama función numérica si el dominio y el codominio de f son subconjuntos de los números reales. Lo que se puede escribir como $f: X \rightarrow Y$ es una función numérica si $X \subseteq R$ y $Y \subseteq R$” (MME, 1976, p. 166)</i> <i>Después de definir las expresiones algebraicas, se definen las Funciones Polinómicas: “Entre las funciones numéricas definidas mediante expresiones algebraicas interesan particularmente aquellas que están dadas por igualdades similares a:</i> $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{5}x^3 + 3x^4$ $f(x) = 2 + 3x + 4x^2 - 5x^3 + 8x^4 - x^5$ <i>en general dichas funciones pueden expresarse en la forma:</i> $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ <i>, esta función se llama polinómica. Las funciones polinómicas se pueden definir en todo el conjunto de los números reales, algunas reciben nombres especiales, función constante, función de primer grado, lineal o afín, función de segundo grado o cuadrática”.</i>	<i>Doce páginas más adelante se propone el título “Funciones reales” donde se define: “Cuando x representa cualquiera de los números de un subconjunto X de números reales, llamamos a x una variable o indeterminada real. Si a cada x de X le hacemos corresponder un elemento de un conjunto Y mediante la función $f: X \rightarrow Y$, se dice entonces que f es una función de variable real x en el conjunto Y.</i> <i>Si la imagen I_f de una función $f: X \rightarrow Y$ es un subconjunto de R llamamos a f, función real. Es decir $f: X \rightarrow Y$, $Y \subseteq R$ es una función real” (MME, 6, 1976, p. 107)</i>
--	--

Para explicar el título Funciones en el grado sexto se enuncia en la introducción: “Hemos visto a través de nuestro estudio como la palabra función es de uso general en casi todas las asignaturas que hasta el momento hemos cursado y se nos ha presentado a través de ejemplos y descripciones sin presentar en forma precisa el concepto. En los cursos anteriores explicamos y definimos el término función, el cual se ha tomado como aplicación, nombres que tendrán el mismo significado en este capítulo, aunque es necesario advertir que muchos autores los diferencian fundamentalmente” (MME, 6, 1976, p. 95). La observación antes de la definición permite inferir que el énfasis depende de la notación que se va a usar puesto que las definiciones enfatizan los mismos invariantes del concepto.

Las variaciones en el nombre, pueden deberse a la herencia de la escuela francesa de las matemáticas cuya influencia se realizó a través de la divulgación de los libros, descrita en el capítulo I; pues esta escuela distingue entre los términos función, aplicación y transformación. Pero quizá lo más importante de destacar es que no se hace referencia alguna a la definición de funciones reales como funciones numérica. Cada una de las definiciones adquiere, de esta manera, un carácter de autonomía, en general se tiende a inducir la grabación del nombre para el concepto, según el tema en el que se esté trabajando.

La definición propuesta para tercero, particularmente su lenguaje, pone en evidencia la arbitrariedad de la naturaleza de los objetos sobre los que se define la función, pero indudablemente esta definición para este grado (estudiantes entre 13 y 14 años) es incompatible con el aprendizaje. Ahora bien, si se tiene en cuenta que la definición presentada para tercero esta inscrita en teoría de las relaciones, sería entonces más coherente presentar el aparte *Notación del* grado sexto para este grado, puesto que enfatiza la definición desde las parejas ordenadas. El paso subrepticio a las notaciones de variables, como si ellas mismas pudieran ser portadoras de la significación de variación en un conjunto numérico, se explicita en el grado sexto y en la definición de funciones numéricas. Cuando se definen las funciones reales, a lo que se suma la introducción de la función como dependencia al iniciar la unidad dedicada al Cálculo Diferencial:

Grado sexto
<i>Unidad Cálculo Diferencial“ La Derivada</i> <i>Introducción: En este capítulo estudiaremos uno de</i> <i>los conceptos básicos más importantes en el</i> <i>desarrollo del cálculo: la derivada de una función.</i> <i>Básicamente discutiremos cómo varía el valor de</i> <i>una función al variar la variable independiente”</i> <i>(MME, 6, 1976, p. 143)</i>

De otra parte, las representaciones diagramáticas también introducen confusiones en el acento de las invariantes del concepto pues $X \xrightarrow{f} Y$, enfatiza la invariante de transformación, mientras $f: X \rightarrow Y$ enfatiza la correspondencia.

El nivel de abstracción de la definición propuesta para el grado tercero, y los ajustes en las notaciones que se realizan, no tienen en cuenta que el cambio de notaciones simbólicas produce distinciones conceptuales profundas y que para que la notación simbólica no se convierta en obstáculo para los estudiantes es necesario que primero existan en los estudiantes los significados de lo que representan. Esta tendencia a priorizar el aprendizaje de las matemáticas como

un sistema taquigráfico, convierte a los símbolos en objetos matemáticos confundiendo la forma con el contenido, práctica necesaria en la alta matemática pero no para las matemáticas escolares. Este énfasis es reafirmado con el sentido que dan los autores al *leer* las notaciones, pues la lectura es asumida en su concepción mínima *decodificación*.

De otro lado, si comparamos estas definiciones altamente formalizadas con la presentada en la década anterior, se deduce que desaparece por completo la idea de dependencia y la sugestiva idea de variabilidad. También es evidente la despersonalización de la definiciones en esta serie – en el texto de Baldor se propone primero la definición de Cauchy – y la descontextualización de la noción con respecto al campo de problemas de donde surgió históricamente (García G., Serrano C., Espitia L., E 1995 - 1997); con este proceso, la noción toma el carácter de verdad indubitable atemporal y universal. (Chevellard 1982).

V.3 Ejemplos propuestos

Los ejemplos varían de acuerdo a las definiciones propuestas. En el grado tercero se proponen ejemplos de relaciones definidas sobre conjuntos numéricos finitos e infinitos, los enteros, y conjuntos cuyos elementos son letras del alfabeto. Algunas de las relaciones son expresadas algebraicamente y son acompañadas de la representación sagital.

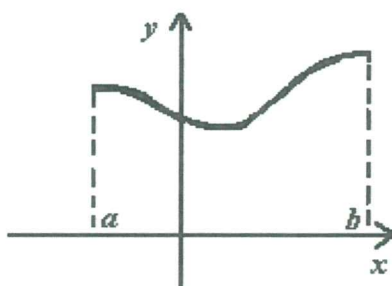
Los ejemplos para la definición general de función en el grado sexto, aunque conservan la misma estructura de los propuestos para el grado tercero, son relaciones definidas con expresiones algebraicas. Los ejemplos correspondientes a las funciones reales enfatizan el tipo de expresión algebraica, de aquí que se describan como ejemplos la función identidad, la función valor absoluto, la función signo y la función parte entera. En la definición de función como dependencia, se propone el cálculo de valores numéricos de funciones, tomando *los incrementos de la variable independiente*.

V.4 Objetos asociados

Los objetos asociados en las definiciones para los grados analizados son: dominio e imagen de una aplicación, de un elemento, de un conjunto; presentándolos en su definición formal y otorgándoles la autonomía de nociones matemáticas. Pero para introducirlos en sexto de nuevo se propone una nueva versión de la función: *“en la sección anterior vimos que una función es tipo de relación. Por tanto podemos afirmar como en el caso de las relaciones, que una función es una terna ordenada (f, X, Y) donde f es una regla o ley definida por*

una función proposicional $F(X,Y)$, que asigna a cada elemento de X un único elemento de Y " (MME, 6, 1976,p.96), esta aclaración es bien importante puesto que el codominio de la función, queda determinado por el conjunto de todos los y que son imagen mediante f al menos de un x . Con esta introducción igual que con la Notación propuesta en el grado sexto, los autores pretenden hacer un *contrato a la baja*, estilo efecto *Topaze* (Brosseau, 1986) señalándole al alumno aquello que es importante retener y valorar en una definición. El conjunto imagen o la imagen de un elemento son representados en diagramas sagitales.

La representación de las funciones se define en tres formas: como enunciados proposicionales del tipo $F(X,Y)$ pero aclarando *que usualmente este se expresa mediante la asignación de imágenes a los elementos del dominio. Así $x \rightarrow y$, también $f(x) = y$* (ME, 6, 1976, p.98); como conjuntos de solución de una relación, es decir como conjuntos de parejas (x, y) . Por último se presenta la representación gráfica enfatizando que ésta representa el conjunto solución de esta relación especial. No es extraño entonces que los ejemplos propuestos presenten las gráficas ya construidas y lo único que se pide es constatar que un elemento del dominio tenga una sola imagen. Sin embargo los criterios no son muy claros para establecer que tipos de gráficas como:



son funciones o no. La explicación que se formula es:

la gráfica dada en la figura corresponde a una función cuyo dominio es el intervalo $[a,b]$

En contraste, en el libro 4, la función lineal se define por su expresión algebraica $y = mx + b$ y por su representación gráfica que es una línea recta. Los autores preceden esta definición con la introducción de *Representaciones de la función*, bajo este título solo reconocen a la representación en el sistema coordenado cartesiano definiéndola como: *La gráfica de una función es el conjunto de todos los puntos $p(x, y)$ del plano cuyas coordenadas (x, y) constituyen la función.* (MME, 1976, p. 40) Pero de nuevo introducen una aclaración: *como generalmente una función está definida mediante una ecuación ($y = f(x)$) nos referiremos a su gráfica como a la gráfica de una ecuación.* Esta aclaración pone de manifiesto la gran confusión de los autores, puesto que en este nivel es claro que la gráfica se

construye a partir de dar a x todos los valores reales y por consiguiente la regla para construir la tabla es imprescindible en este paso.

Todo parece indicar que el uso de las notaciones A, B , para los conjuntos en las aplicaciones, notaciones X, Y para designar funciones o funciones reales no corresponde sino a un cambio de forma, puesto que a la función lineal la denominan ecuación, pero el mismo nombre es utilizado para designar las ecuaciones de primer grado: “podemos también definir la ecuación lineal en dos variables como toda ecuación equivalente a la ecuación de la forma $ax + by + c = 0$, $a \neq 0 \vee b \neq 0$ ” (MME, 1976, p. 43). No es entonces extraño que este tipo de enseñanza haya contribuido a oscurecer el significado de variabilidad que comporta el uso de las letras en el álgebra, pues su intención tal como lo hemos afirmado es la notación formal, no el significado de las ideas representadas por esas notaciones.

V. 5 Ejercicios y problemas

Para describir el análisis y la evaluación de los ejercicios y problemas propuestos es pertinente recordar la significación que se adoptó para cada uno de ellos. Los primeros son actividades que ponen en juego explícitamente la aplicación y reforzamiento de los contenidos. Los problemas, no se reducen solo al tipo de formulación: Enunciado-pregunta, por el contrario es una terna conformada por: situación-alumno-entorno, pues la existencia del problema depende de si el sujeto lo percibe como una dificultad para la cual no tiene algoritmos inmediatos que le permitan solucionarlo.

Con estas consideraciones, se puede observar en la tabla siguiente que la serie MME solo propone ejercicios los cuales son solo aplicaciones de las definiciones, sin ningún tipo de transformación.

<i>Ejercicios</i>	<i>Tercero</i>	<i>Cuarto</i>	<i>Sexto</i>
<i>Determinación de aplicaciones como casos especiales de relaciones.</i>	10		
<i>Determinación de aplicaciones en conjuntos de parejas.</i>	5		5
<i>Representación cartesiana y sagital de parejas ordenadas</i>	5		
<i>Representación gráfica a partir</i>			

<i>de expresiones algebraicas</i>		27	6
<i>Identificación de la expresión de una relación como función</i>	10		
<i>Identificación de expresiones algebraicas como funciones lineales</i>		4	
<i>Determinación del dominio</i>			8
<i>Calcular el valor de una función.</i>			17
<i>Representar gráficamente en el sistema cartesiano, a partir de la expresión, vía la tabla</i>			8
<i>Determinar clases de funciones (inyectivas, sobre y biyectivas) en expresiones algebraicas</i>	10		12
<i>Determinar clases de funciones (inyectivas, sobre y biyectivas) en gráficas cartesianas discretas</i>			6
<i>Calcular la función compuesta.</i>			4
<i>Total</i>	40	31	59

En tercero, en general los ejercicios enfatizan la presentación de la función como una clase especial de relación, los enunciados tanto de la identificación de la noción como los referidos a identificación de clases de funciones son formulados en términos como: *Determinar cuales de las siguientes relaciones R definidas en funciones proposicionales Rxy son aplicaciones (funciones), o, Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$; determinar cuáles de las relaciones R definidas en los siguientes conjuntos solución S se constituyen en funciones.* (MME, 1976, p. 73).

En cuarto grado, disminuye este tipo de ejercicios porque se coloca el acento en la representación gráfica cartesiana de las funciones lineales, cuadráticas y exponenciales, vía la elaboración de la tabla. Aparece el intento de economizar el saber, puesto que se anotan cuestiones como: *tomemos cada valor de x de la tabla y su correspondiente valor de $y = f(x)$, trazamos una línea suavemente curvada uniendo los puntos en orden creciente de los valores de x . La curva se llama representación gráfica de la función dada y el proceso de construir la curva, se llama hacer la gráfica de la función* (MME, 1976, p. 109), esta nota se

considera necesaria y suficiente para que el estudiante de ahora en adelante tenga éxito en la representación gráfica de las funciones y es equivalente a la descrita por Ruiz Higuera (1994) en su análisis de los manuales escolares españoles de la década del 90 ; en el texto de Lazcano y Barolo, los autores también sugieren a los alumnos como hacer en la práctica los gráficos: *Como el conjunto de puntos pertenecientes a una función es ilimitado, se disponen en una tabla de valores algunos pares correspondientes a puntos de la función. Estos valores, llevados al plano cartesiano, determinan puntos de la gráfica. Uniendo estos puntos con una línea continua se obtiene la representación gráfica de la función* “ (Lazcano y Batero citados por Ruiz Higuera, 1994, p. 247). En esta presentación, la gráfica se convierte en un fin en si misma.

Como contraste a la presentación que hace la serie MME de la noción, resalta tal como lo hemos señalado al inicio de este capítulo, la presentación que hace el texto Algebra y Geometría del concepto. Si bien a manera de introducción en la Unidad II Sistema de Ecuaciones, los autores escriben *Función. La base fundamental de las disciplinas matemáticas es el concepto de relación. Así en aritmética se trata de establecer relaciones entre números, en álgebra relaciones entre cantidades expresadas por medio de letras; en geometría relaciones entre figuras planas y sólidas. A todas estas relaciones se les da el nombre de funciones* (Algebra y Geometría 1976, p. 45, el subrayado es nuestro) pero la definición de función que se propone, no enfatiza esta característica: *Por definición se dice que una cantidad es función de otra cantidad cuando su valor depende del valor o valores de dichas cantidades. Así si el valor de a depende el valor de b se dice que a es función de b y se escribe $a = f(b)$* , así como los ejemplos que la preceden – espacio relacionado con la velocidad de un automóvil – esta definición corresponde a una versión de la definición propuesta por Euler en 1755 *Unas cantidades dependiendo de otras de manera que sí las otras cambian, estas cantidades cambiarán.*, pero lo que interesa es la invariante de fórmula o expresión analítica.

Para enfatizar esta invariante los ejemplos posteriores a la definición se dedican a calcular valores de funciones. Dentro de los objetos asociados a la función se incluyen las definiciones de variable y constante, la primera es justificada a través del siguiente argumento *Donde quiera que haya función se tendrán cantidades de valor variable. En toda función el valor de la variable depende de los valores que pueda tomar la otra variable. De aquí que a la primera se le llame variable dependiente y a la segunda variable independiente* (Algebra y Geometría 1976, p. 46).

De igual forma se introduce el concepto de *constante* señalando que *en las relaciones funcionales pueden intervenir otras cantidades de valor fijo y determinado llamadas constantes*, estos dos objetos permiten justificar el contenido *Representación matemática de las funciones* aduciendo *cuando se conoce la relación matemática que liga una variable con otra u otras variables se puede expresar esa función por una fórmula o expresión algebraica*. A continuación se proponen ejemplos de expresiones algebraicas funcionales. Además de estos objetos se identifica al dominio y al codominio o rango, sin diferenciación alguna entre ellos, estos son tomados como el conjunto de valores que pueden tomar las variable independiente y dependiente, se hace énfasis que dicho conjunto de valores son casi siempre los números reales. Como aspecto a resaltar se incluye inmediatamente la definición de *variación directa e inversa* enfatizando su definición sobre la noción de variable y sobre las características que definen la proporcionalidad como función lineal (García G., Serrano C., Espitia L., E., 1997) *dos variables están en relación directa cuando al multiplicar o dividir una de ellas por una cantidad la otra queda multiplicada o dividida por esa misma cantidad*.

Otros objetos asociados son la representación gráfica de funciones – construcción a partir de la tabla – y el *coeficiente angular*. La primera se denomina *Gráfico de una función* y se impulsa de nuevo la creencia ingenua de trazar los gráficos *de las funciones uniendo en forma conveniente los puntos que corresponden a los valores de las abscisas y ordenadas*. Por su parte el *coeficiente angular*, que en términos modernos corresponde a la pendiente y que los autores así denominan pero sin otorgarle un papel protagónico es identificado como la

relación , $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$ después se presentan varios ejemplos en donde se

muestra que dicha *relación* es *constante* para rectas representadas gráficamente. La *pendiente* se identifica con esta *constante* y con el coeficiente de la x en las expresiones algebraicas de funciones lineales. Estas son identificadas por las características de sus expresiones algebraicas, ecuaciones de primer grado y por su gráfica recta. En los ejercicios propuestos al final de la unidad sólo se incluyen 14 ejercicios para representar funciones a partir de la expresión algebraica.

V. 6 El cambio ¿ cualificación de la noción matemática de función ?

La descripción del cambio radical que sufrió el concepto de función durante las década del 70 no deja de asombrar por la amplitud adquirida por las diversas definiciones y notaciones que se suceden unas tras otras para tratar de acomodarse a los condicionantes en los diferentes bloques. Pero de esta amplitud, desde la cual el objeto parece haber llegado a su apogeo como noción

matemática surge la necesidad de hacer un balance. Este puede iniciarse analizando los propósitos que orientaron la reforma de las matemáticas modernas que si bien fue elaborada en otros contextos sociales, no podrían escapar a las instituciones nacionales encargadas de legalizarla en el país. La reforma no solo consistió en la introducción de contenidos modernos, venía acompañada de una renovación pedagógica desde la cual se intentó sustituir el tradicional didactismo dogmático por una enseñanza más heurística, integrando los principios del constructivismo, pues no era en vano su apoyo en las propuestas de Piaget o de Diennes, por ejemplo. Pero del análisis se puede concluir, que este enfoque, el cual sustentaba el paso de una enseñanza de las matemáticas a la Educación Matemática, anunciado en el programa, no fue considerado en la elaboración de los textos de esta década.

De otro lado, la introducción de las estructuras matemáticas como objetos de enseñanza, se fundamentó en la virtud de simplificar esquemas¹, y por compartir la idea de que éstas son también las que rigen el pensamiento matemático, por consiguiente volverlas objeto de enseñanza tenía el propósito de desarrollar este pensamiento. De aquí que el programa de la década del 70, incluya objetivos orientados hacia el desarrollo de habilidades buscando ser coherentes con estos principios, pero la conclusión que puede elaborarse del análisis de la serie MME, es también que este propósito no fue incluido en su elaboración. Más bien, la reforma se asumió como la presentación de contenidos modernos, y su adquisición por parte de los estudiantes, se asumió dentro del paradigma que considera el conocimiento como un problema de acumulación.

El balance también puede incluir la valoración de los objetivos generales propuestos para la formación personal, en el programa oficial. Por ejemplo el objetivo que preescribe *Desarrollo de habilidades, destrezas para plantear problemas y resolver problemas prácticos que admitan la aplicación de modelos matemáticos*, una apropiación conscientizada de estos, habría llevado a modificar la presentación del modelo didáctico que sustenta el texto y también a modificar sustancialmente el sentido de los ejercicios y a incluir problemas.

Pero volviendo al problema que nos ocupa, el concepto de función, el balance muestra que se ennoblece como noción matemática, pero como *objeto demasiado grueso* (Ruiz Higuera 1994, p.358) pues las distintas definiciones elevan su

¹ Este término, deviene de la teoría piagetiana y significa organización invariante de una conducta por una clase de situaciones dadas

nivel de complejidad a tal grado, que el concepto pierde su sentido, quedando reducido a la algoritmización de notaciones y simbolismo. La incorporación de los objetivos personales y los referidos a la formación que perseguía el programa oficial, habrían conducido a revisar la programabilidad del concepto, orientado su presentación hacía el Cálculo, por ejemplo o a revisar el fanatismo por la supuesta axiomática de su presentación.

Del análisis se evidencia también que el concepto sufre una radical exfoliación del campo semántico que lo rodeo en su evolución conceptual y aún de la presentación que se hace en el texto de Baldor. En síntesis, el interrogante que surge es si el concepto sufrió una elementalización o una transposición didáctica, la respuesta deja muchos vacíos, pues si se tienen en cuenta los aspectos que desde el inicio de la elaboración de textos determinaron la elementalización, las diversas definiciones tienen el carácter de autonomización, son en sí cada una, nociones matemáticas, ninguna de ellas se convierte en noción paramatemática para otra.

Un punto a destacar en los textos de cada década es que siguen el esquema teoría práctica, los ejercicios se introducen solo después de haber estudiado las definiciones y propiedades, lo que da lugar a darle un valor excesivo a la teoría. Los ejercicios son más orientados hacía el cálculo de la función concretas, tomando casi el sentido de una concepción de fórmula, lo que contrasta con las propiedades teóricas que se quieren resaltar en las definiciones pero quizá lo más sorprendente no es solo el modelo didáctico, sino las diversas definiciones y sus diferencias en la serie del 70.

VI. Una reflexión final

Si se asume la importancia de los textos y de los programas con las características que propone Chevellard (1991, p.61), convertirse en una concepción legitimada del saber a enseñar y en norma de progresión del conocimiento escolar pueden entonces incluirse en el entramado de relaciones institucionales que forman las concepciones de profesores y estudiantes y como entidades protagónicas de prácticas sociales en la escuela (Cantoral, 1994). Lo que supone elaborar balances sobre sus principios y sus propuestas, en articulación con los otros aspectos que determinan la educación.

En particular, habría que reconocer, que son un condensado de las sociedades y por lo tanto su valoración no puede descuidar el entorno social y cultural donde son elaborados. Este es precisamente el factor que habría que incluir en la descripción de los textos en cada una de las décadas analizadas. El entorno social más próximo sería en este caso los profesores de matemáticas, como comunidad que además de ser usuaria participa en su elaboración. Pero siendo ligeros en este análisis, puede identificarse que en cada una de las correspondientes décadas, el estatus del maestro, y aún su formación especializada – la Licenciatura en Matemáticas – no estaba ni la una ni la otra reconocidas. Específicamente la licenciatura se estructuró sobre la base de formar maestros para la enseñanza de las matemáticas a nivel universitario. Por su parte el estatus del profesor, como profesional hasta muy recientemente comienza a ser reconocido. A lo anterior se suma que al igual que en otra regiones, los elemento del conocimiento profesional que caracteriza la profesión de educador sufría las tensiones entre las dos disciplina de formación, la matemática y la pedagogía.

Pero existe un entorno más amplio, la comunidad de los matemáticos pero como señala Ruiz Zuñiga en sus análisis de la Reforma del 70, “en América Latina la ausencia de una sólida comunidad matemática o científica hacía la entrada de la Reforma aún más fácil” (1992, p. 10), lo mismo podría decirse de la existencia de esta comunidad en la década del 60. Pero si tenemos en cuenta que la serie del 70 obedece a una cambio, que indudablemente se puede catalogar dentro de la apreciación social de las matemáticas, pues fue la necesidad de formación científica y tecnológica en primera instancia la que lo determinó; cabe también preguntarse por entornos más lejanos, como es la participación de la sociedad en pleno, industriales, políticos, padres de familia, entre otros, pues la decisión depende de la valoración que se de a las matemáticas como elemento de la cultura.

Todos estos elementos conforman los ingredientes que dan forma conceptual a la noción de currículo, y éste el encargado de poner en marcha el plan de formación que desea la sociedad. Pero también esta área, apenas iniciaba su desarrollo, tal como lo demuestran las diferentes presentaciones y organizaciones de los programas en cada una de las décadas. Estos ingredientes conllevan a ratificar la afirmación de Ruiz, *entrada fácil*, tanto de textos elaborados de otras regiones, como de la serie MME.

Pero estamos en un momento de cambio, no sólo porque cada uno de los aspectos mencionados ha iniciado desarrollos, sino también por la búsqueda de alternativas didácticas, en las cuales las innovaciones sobre la enseñanza de las matemáticas comienzan a tener un peso significativo entre la profesores. Por consiguiente los contenidos deben ser replanteados, en particular el concepto de función, tal como se ha descrito, sufre un cambio radical, pues su campo de referencia vuelve a ser el estudio del cambio. Este, ha conducido a valorar la representación gráfica, las aproximaciones numéricas pero acompañada de intermediarios didácticos como es la tecnología con fines educativos, calculadora gráfica.

Pero quizá la más pregunta más importante que surge ante este reto, es si estamos los profesores preparados para comprender la profundidad del nuevo referente conceptual de una noción de función como dependencia. La síntesis elaborada para mostrar su desarrollo conceptual (C. II), muestra que ello implicaría abordarla como interpretación de fenómenos, donde la variación, la variable, vuelvan a tener sentido, es asumir que las definiciones formales provienen del estudio de problemas prácticos. Lo que implica necesariamente modificar los modelos didácticos.

Sin embargo y retomando a Cantoral “dado que somos una comunidad acostumbrada a la traducción de textos y al uso sistemático de propuestas que no fueron pensadas para nuestros sistemas educativos” (1994, p.19) es necesario coordinar nuestros esfuerzos de innovación e investigación con los desarrollos internacionales, para comenzar a tomar consciencia del papel de los textos, de su potencialidad para introducir cambios en la práctica escolar, o también para crear imaginarios didácticos cuando introduce medios que no pueden ser utilizados masivamente en los sistemas escolares.

Por último, también resaltamos cómo los cambios radicales al estilo *de objetos demasiado gruesos* introducidos por el texto, conllevan a que los profesores vuelvan a su viejo libro, como es el caso del texto de Baldor quién en 1.992 cumplía ya su novena reimpresión y aún hoy es usado en clases de matemáticas.

Este efecto que ha sido estudiado por el grupo de Cálculo y Cognición del Cinvestav de México, ha mostrado que en la región sur mexicana, “profesores de matemáticas de bachillerato y universidad, veinte años después de la reforma, cuando se supone que la propuesta ha sido incorporada por los profesores, los que habían sido formados antes de la reforma no podían leer satisfactoriamente los nuevos textos” (Cantoral, 1994, p.19). Pero en el caso del texto de Baldor tal como lo hemos descrito, su presentación de la noción de función es acorde con los planteamientos del nuevo referente del concepto, pero es necesario asumirlo como noción matemática.

La reflexión que nos deja este análisis y que queremos compartir con la comunidad de educadores, es que ante las solicitudes y las oportunidades legales que tenemos para participar en el cambio que nos exige la sociedad, debemos tomar consciencia que, hacer un diseño curricular no es cuestión trivial y sencilla. Hacer elecciones sobre los contenidos, no es cuestión de simplificar o elementarizar, como tampoco simplificar la riqueza y la complejidad de las nociones matemáticas, ni de su comprensión. La serie de factores que han dificultado nuestra participación en la toma de decisiones, comienza a superarse y como hemos visto los profesores somos agentes participativos claves en el cambio, puesto que el desarrollo del proyecto no depende ya de un director, ni de una institución, al contrario depende de un enorme trabajo de coordinación, de la cualificación como profesionales en la Educación Matemática y desde luego del apoyo externo a esta comunidad incluyendo la expectativas políticas de la sociedad sobre la educación matemática del ciudadano moderno.

Bibliografía

ALEXANDROV. A.D., KOLMOGOROV. A.N., LAURENTIEF. M.A.y OTROS 1973. La Matemática: Su contenido métodos y significado. (Vol.1).

ALEXANDROV. A.D., KOLMOGOROV.A.N.,LAURENTIEF.M.A.y OTROS 1976. La Matemática: Su contenido métodos y significado. Vol 1 y 2. Madrid: Alianza Universidad.

BALDOR. A., 1988. Aritmetica teorico practica. Capitulo XLII. Compañía cultural editora y distribuidora de textos americanos. Madrid.

BALDOR. A., 1977. Algebra Cultural Centroamericana, S.A. (e d) Madrid. Capitulo Xxy XXI.

BATANERO C., SERRANO L., ORTIZ J., 1996. Las Frecuencias Relativas y sus Propiedades. Revista EMA. Vol. 2 No 1, pp.19 - 36

BELL, E.T. 1985. Historia de las matemáticas..

BELLEMIN, J.J., Fragmentos d'histoire des Mathematiques, Broucheure APMEP, 1981, 41, 7 - 68.

BERNSTEIN B.. 1990. La Construcción Social del Discurso Pedagógico. Textos seleccionados.Editor: Mario Díaz.

BOYER, C., 1996 La Historia de la Matemática

CANTORAL R., 1997. Los Textos del Cálculo: una Visión de lasReformas y Contrarreformas. Revista EMA.. Vol 2, No 2, pp. 115 - 131.

CARDONA A., PATIÑO G., 1976. Algebra y Geometría. Cuarta Edición

CASTRO; Y;; 1997 Pasado y presente del Cáculo en Colombia . Depto de Matemática. Universidad Javeriana.

CHEVALLARD, y 1991. La transposition didactique - Du savior savant au savior enseibné. Grenoble: La penseé sauvage.

DAVIS J. P, HERSH. R., Experiencia Matemática.. Ministerio de Educación y Ciencia.

EL CONCEPTO DE LA FUNCIÓN HACIA LA MITAD DEL SIGLO XIX. 1996. Area de Educación Superior Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de estudios Avanzados.IPN. Serie Traducciones

GARCÍA G., 1996. Reformas en la Enseñanza de las Matemáticas Escolares: Perspectiva para su desarrollo. Revista EMA. Vol 1, No 3, pp.195 - 206.

GARCÍA G., ESPITIA L., SERRANO C., 1995 Elementos para la construcción de una didáctica de la función. Serie Cuadernos de Investigación. U. Pedagógica Nacional

GOMEZ R., GUARIN H., LONDOÑO N., WILLIS D. 1976. Matemática Moderna Estructurada 3.

GOMEZ R., GUARIN H., LONDOÑO N., WILLIS D., 1976. Matemática Moderna Estructurada 4.

GOMEZ R., GUARIN H., LONDOÑO N., Willis D., 1976. Matemática Moderna Estructurada 6.

GRUPO DE ESTUDIOS DE LA ENSEÑANZA MATEMÁTICA ESCOLAR. 1962. Matemática para la Escuela Secundaria. Primer Curso de Algebra (Parte 2). Traducción preliminar de la edición inglesa revisada.

RUIZ, A.; 1992 Las Matemáticas Modernas en las Américas: Filosofía de una Reforma. Educación Matemática en las Américas. Actas de la Octava Conferencia Interamericana de Educación Matemática. UNESCO.

RUIZ H, L.; 1994 Concepciones de alumnos de secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y Didáctico. Tesis Doctoral Universidad de Granada

PIAGET. J, G., CHOQUET. J., DIEUDONNÉ. R., y Otros. 1986. La Enseñanza de las Matemáticas Modernas.

SIERPINSKA A., 1992 On understanding the notion of function Dubinsky, Harel Eds. 1992. The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy. M.A.A. Notes and Reports Series Editorial Studies Board. Purdue University.

SHUBRING, G. 1987. For the Learning of Mathematics 7,3. Sobre la metodología del Análisis Histórico de los libros de Texto: Lacroix, autor de Textos Escolares (traducción libre de Alberto Camacho Rios. F.L.M. Publishing. Association, Montreal, Quebec, Canada.

THOM, R., (1970) .Las matemáticas modernas un error pedagógico y filosófico? En Hernández, J (e d) 1978. La enseñanza de las matemáticas Modernas, (p. 115 - 129). Madrid: Alianza Universidad.

THOM, R., 1974. Matemáticas modernas y matemáticas de siempre. En Hernández, J. (e d) 1978. La enseñanza de la matemáticas modernas. pp. 140 - 156. Madrid: Alianza Universidad.

YOUSCHEVITCH, A.P., 1976. The concept of function up to the middle of the 19th century, *Archive history of exact sciences*, 16, (p. 36 - 85). Traducción de
Traducción de Bellemin, J.J., *Fragmentos d'histoire des Mathematiques*, Broucheure
APMEP , 41, 7 - 68.

PUBLICACIONES

NOVIEMBRE 1995

36

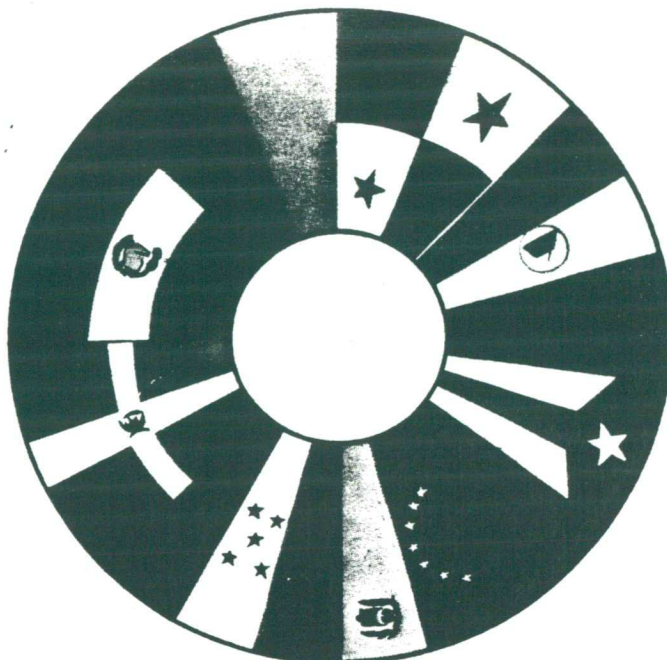
NOTAS DE MATEMATICAS

UNA **Universidad Nacional de Colombia**
Departamento de Matemáticas y Estadística

CONTENIDO

1. **CARLOS ZULUAGA** *Acerca de un tipo de ejercicios de criptoaritmética.* 1
2. **MARÍA FALK DE LOSADA** *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas 1995.* 13
3. **GLORIA GARCÍA.** *Situaciones de variación numérica y algunas representaciones asociadas.* 41
4. **LEONOR CASTRO DE LUNA** 59
Geometría en una esfera para sexto grado.
5. **MARÍA FALK DE LOSADA** *Participación Colombiana en la Olimpiada Asiático-Pacífica.* 65

Editores: Gladys A. Villamarín T. – Carlos E. Vasco

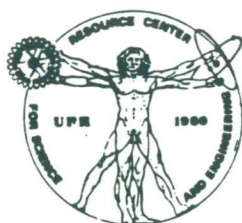


MEMORIAS

*De la Décima Reunión
Centroamericana y del Caribe sobre
Formación de Profesores e
Investigación en Matemática Educativa*

Puerto Rico
6,7,8,9 y 10 de agosto de 1996

 Universidad de
Puerto Rico



 Universidad Interamericana
de Puerto Rico.
Recinto de Ponce

ÍNDICE

	Página
CONFERENCIAS PLENARIAS	
El constructivismo de Piaget y el aprendizaje de los conceptos abstractos de la matemática avanzada	1
Ed Dubinsky	
El proyecto de Las Matemáticas en Contexto en Puerto Rico	10
Jorge M. López, Ana Helvia Quintero	
ÁLGEBRA - PONENCIAS	
El concepto de función y su relación con la proporción	20
Teodoro Melchor Ceballos, Rosa María Farfán Márquez	
Enseñanza-aprendizaje de vectores, en la facultad de ingeniería civil y tecnológica.....	26
María Ester Gambetta Chuk	
Estudio comparativo del Principio de Inducción Matemática en los libros utilizados por los estudiantes de la licenciatura en matemáticas	32
Yarielda Y. Cruz Q., Mayda E. Saavedra V., Guadalupe T. de Castillo	
Estudio de dificultades que confrontan los estudiantes al iniciarse en el aprendizaje del álgebra	38
Edilma Mendieta de Rujano, Dalvis González T., Doranet González T.	
La influencia del juego en la resolución de ecuaciones de primer grado	43
Carlos Nicanor Ramos, José Guzmán Hernández	
Modelos que pueden ayudar a los estudiantes de secundaria a desarrollar estrategias en la resolución de problemas algebraico-verbales	49
Ciro Cerón Peralta, José Guzmán H.	
Transferencia de conceptos y métodos relacionados con funciones algebraicas elementales	55
Asela Carlón Monroy, Sergio Cruz Contreras	

Un estudio del análisis de contenido de variación, dependencia y representaciones en textos escolares colombianos de la educación básica secundaria	61
Gloria García, Celly Serrano, Luis E. Espitia	

ÁLGEBRA - TALLERES

Actividades para el aprendizaje activo de las matemáticas:	
La reforma curricular de PR-SSI	68
Norberto R. Sanfiorenzo, Milagros Martínez, Vicente Isaac, Julia E. Rodríguez, Elliot Albelo, Víctor Hernández	
“Algeblocks” y la Politablea Dreyfous: herramientas innovadoras para la enseñanza de álgebra	77
Ricardo Dreyfous, Enery Ortiz	
Construcción del concepto de función a través de la resolución de problemas haciendo uso explícito de estrategias heurísticas	80
Elena Favila Ruiz Ledesma, Elvia Rosa Ruiz Ledesma, Fermín Acosta Magallanes	
El laboratorio como técnica de enseñanza	84
Socorro M. Sánchez Figueroa, Waldo A. Torres	
La enseñanza de álgebra en el nivel intermedio	89
Carmen V. Sierra, Marisol Haddock, Rubén A. Vázquez, Alexander Ortiz, Julia E. Rodríguez	

ARITMÉTICA - PONENCIAS

De una lectura del error a una interpretación de los saberes de los niños	92
Edda Norma Jiménez de la Rosa y Barrios	
Distintos procedimientos para resolver problemas de división	97
Patricia Martínez Falcón	
La enseñanza aprendizaje de la proporcionalidad	103
María del C. García García, Yolanda Proenza Garrido	

CÁLCULO Y ANÁLISIS - PONENCIAS

Algunos elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico, en el cálculo integral	109
Germán Muñoz Ortega	
¿Cómo fomentar las habilidades para la resolución de problemas en un curso de cálculo?	115
Agustín Grijalva Monteverde, Silvia Elena Ibarra Olmos	
Detección de algunos obstáculos que dificultan la asimilación y manejo de los conceptos presentes en el análisis y comprensión de los problemas sobre variación	121
Ramiro Avila Godoy, Víctor M. Hernández Lizárraga	
El acercamiento infinitesimal como una alternativa para la enseñanza del cálculo en escuelas de ingeniería	127
J. Ismael Arcos Q.	
El límite y continuidad de funciones utilizando un hipertexto	133
Lázaro S. Dibut Toledo, Tomás E. Colarte Morando, Migdalia Torres del Toro	
El significado y el sentido de las nociones de variable y variación en los textos de cálculo	139
Evelia Reséndiz Balderas, Ricardo Cantoral Uriza	
Estrategias para resolver problemas en análisis matemático	145
Héctor Jiménez Milián	
Fundamentación del trabajo con las funciones en la escuela cubana actual	150
Mario Armando Gómez Hernández, José Jesús Sosa Rivera	
Hacia la construcción de un discurso matemático para estudiantes de economía. Una experiencia didáctica en cálculo de varias variables	154
José Campero P.	
Interpretación y entendimiento del Teorema de la Función Implícita	160
Jaime J. del Río Castillo	

La etnografía educativa como una técnica de investigación en la enseñanza del cálculo en el nivel medio	166
Analida Ardila, Egberto Agard, Germán Beitía, Guadalupe de Castillo, Jorge Hernández	
La inversa global de una función en $\mathbb{R}^2$	172
Jorge E. Hernández U.	
La problemática en la enseñanza de la Delta de Dirac	178
Patricia Camarena Gallardo, Carlos Imaz	
¿Puede ser el cálculo relevante para nuestros estudiantes?	184
Marta Rosas de Cancio, Rosa Tirado	
Reflexiones sobre la inclusión de la instrucción heurística en el currículo	188
Carmen Luisa Méndez Fabret, Martha Fernández Casuso, Juan Raúl Delgado Rubí, Benito Gómez Martínez, Milagros Horta Navarro	
Un estudio sobre la enseñanza del cálculo en el nivel medio en Panamá: algunos resultados	193
Guadalupe de Castillo, Analida Ardila, Germán Beitía, Egbert Agard, Jorge Hernández	
Validación de un material para la enseñanza del cálculo y de una propuesta metodológica	199
Juana Castillo Padilla	

CÁLCULO Y ANÁLISIS - TALLERES

Un taller de y para profesores. "La resolución de problemas en el salón de clases: Matemáticas (Cálculo)"	206
Javier Lezama Andalón, Blanca Rosa Ruiz Hernández, Liliana Suárez Téllez, Sara Gil Balderrama, Martín Cañas Blancá	
Un taller de y para profesores. "La resolución de problemas en el salón de clases: Matemáticas (Precálculo)"	210
Salvador Romano Reyes, José Luis Torres Guerrero, Alma Alicia Benítez Pérez, Desireé Alvarado Paz, Antonio Arellano Aceves	

DIDÁCTICA - PONENCIAS

Acerca del tratamiento metodológico de las líneas directrices fundamentar-demostrar y adiestramiento lógico-lingüístico a partir de la estructuración por niveles de la habilidad demostrar proposiciones matemáticas en la escuela	213
Elpidio López Arias, Ramón Simón Ricardo	
Algunas experiencias en la estructuración sistémica de los contenidos matemáticos en la enseñanza superior	220
Juan Raúl Delgado Rubí	
Desarrollo del pensamiento numérico. El proyecto	226
Jesús Grijalva Ayala	
El uso de representaciones en contextos de enseñanza: el caso de áreas y arreglos	229
José Alberto Contreras Francia	
Elementos teóricos que fundamentan el proceso de comunicación educativa y didáctica de la matemática	235
Edilma Mendieta de Rujano	
Enseñanza de la matemática: una alternativa	240
Niurka Ramos Rodríguez	
¿Enseñanza problemática vs. enseñanza por problemas?	246
Paul Torres Fernández	
Entre la elaboración y el uso de un libro de texto de matemáticas en primer grado de primaria	253
Alicia L. Carvajal Juárez	
¿Existen errores en las ilustraciones de conceptos básicos en los libros de texto de matemática de la educación primaria?	259
Elba Bahamóndez Carrizo	
La solución de problemas como contenido de curso	265
Miguel Angel Moreno Núñez	
Las series matemáticas y el multiplicador en Economía	271
José Armando Albert H., Rosa María Farfán M.	

Nuevo enfoque sistémico de la matemática numérica y su aplicación en la confección de una biblioteca de métodos numéricos basada en objetos (NOE)	277
Fernando López, Darién Martínez	
Perfeccionamiento del programa de una disciplina para una carrera dada sobre las bases metodológicas de la articulación interdisciplinaria	282
Bertha Fernández de Alaíza García Madrigal	
Proyecto para la evaluación de la calidad en la enseñanza de la matemática para ingeniería	288
Eugenio Carlos Rodríguez	
Sobre la demostración matemática	294
Egberto Agard	
Un estudio comparativo entre el lenguaje ordinario y el lenguaje formal con estudiantes del nivel medio superior	299
Carlos Arteaga Carmona, Antonio Rivera Figueroa	
Un estudio sobre los métodos que utilizan los estudiantes universitarios para modelar situaciones reales	305
Simón Mochón, Jerónimo Godínez	

DIDÁCTICA - TALLERES

El tangrama y la construcción de conceptos matemáticos	311
Teresita Peralta Monge	
El tangrama y sus múltiples aplicaciones	316
Adbel Rodríguez	
La propuesta de cambios de contenidos	318
Patricia Raquel Fogliatti de Job, Luis Fernando Job	

FILOSOFÍA E HISTORIA - PONENCIAS

Etimología y filosofía de la numeración azteca	323
Felipe Pardiñaz, Juliana Bautista, Eulalia Aquino, Belem Reyes, Claudia Santos	

Génesis y desarrollo de la Transformada de Laplace	329
Eduardo Miranda Montoya	

FORMACIÓN Y ACTUALIZACIÓN DE PROFESORES - PONENCIAS

Componente investigativo vs. estudio independiente	335
Luisa García de la Vega	
!Decidirse, esa es la cuestión!	340
Dalgys Rosales Leyva	
El profesor como constructor de eventos pedagógicos acerca de eventos curriculares: un marco teórico que integra el currículo, la enseñanza y el aprendizaje en estudios de aprendiendo a enseñar matemáticas	343
José Alberto Contreras Francia	
Hacia el perfil del maestro de primaria	349
Nivia G. de Him, Analida Ardila, Dilcia A. de Arosemena	
Los diplomados en matemáticas: una estrategia en la formación de profesores de primaria	355
Irma Nancy Larios Rodríguez	
Nuevo plan de estudios de la licenciatura en matemática, su diseño y aplicación	361
Lydia O. Burgoa	
Opción para un curso de didáctica	366
Eusebio Guinart Ramil	
Sistema tutorial inteligente "LIREC"	369
Carlos Armando Cuevas Vallejo	
Un diseño del componente investigativo	375
Juan José Fonseca Pérez	
Una experiencia con profesores de CCH: actualización docente alrededor de nuevas tecnologías	382
Eugenio Díaz Barriga Arceo	
Una propuesta de actualización en la enseñanza de las matemáticas para maestros de educación primaria	388
David Block Sevilla	

GEOMETRÍA - PONENCIAS

Como fijar la habilidad para fundamentar-demostrar en geometría	394
Miguel A. González Rangel	
Construcción del concepto de ángulo complementario con apoyo del lenguaje LOGO	400
Mayra Murillo, Miguel Rivera	
Dos momentos en la enseñanza con un mismo problema	406
Teodora Tsijli	
El método análisis-síntesis en la demostración de teorema y resolución de problemas geométricos. Una propuesta en la enseñanza	412
Edilma Mendieta de Rujano	
En busca de una demostración del Teorema de Pitágoras: una experiencia con estudiantes de I, II, III y IV nivel secundario	418
Guadalupe de Castillo	
Imaginación espacial	424
Alejandro Rivera González	
Modelos geométricos en la formación del pensamiento crítico	431
Germán Luis Beitía	
Propuesta metodológica para la enseñanza de la geometría plana en el bachillerato	437
Francisco Alarcón Ahumada	
Retomando la geometría del triángulo desde un punto de vista de construcción de conceptos	443
Claudia M. Acuña Soto	
¿Se aprende la geometría que enseñamos?	449
Alexis Almaguer Zayas, María de los Angeles Prieto Durán, Ileana Roque Hernández, Alicia Monteagudo Martínez	
Sección áurea, número de oro y algo más... ..	455
Cecilia R. Crespo Crespo, Christiane C. Ponteville	

GEOMETRÍA - TALLERES

¿Cómo ayudar a los alumnos a realizar demostraciones?	461
Luisa García de la Vega	
El círculo circunscrito a un triángulo y la alineación de puntos	463
Mayra Murillo, Guadalupe de Castillo	
Extensiones del Teorema de Pitágoras	466
Juan Manuel Nole	
Geometría para alumnos de 15 años. Una propuesta de trabajo	472
Gustavo E. Bermúdez Canzani	
Taller acerca de la enseñanza de la simetría y la congruencia. Prototipos didácticos	481
Jorge Ruperto Vargas Castro	
Taller de geometría para la escuela primaria. Cuadriláteros	485
Eréndira Valdéz Coiro	
Visualizando geométricamente algunos conceptos aritméticos y algebraicos	491
Violeta Brenes C., Ana Lía Quesada S.	

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA - PONENCIAS

Un estudio exploratorio sobre aspectos estocásticos en estudiantes universitarios de nuevo ingreso	497
Enrique Hugues Galindo	
Comprensión de la idea de Ley de los Grandes Números en estudiantes de nivel superior	503
José Armando de León Solórzano	
Comprensión de las ideas de covarianza y regresión bajo incertidumbre en estudiantes de licenciatura y profesores de nivel medio superior y superior	509
Ignacio Delgado Escobar	
El tratamiento del concepto de azar en los programas y libros de texto de la escuela secundaria en México	515
Maricruz Galván Salgado	

Exploración sobre indicios de la idea de azar en niños de preescolar y primaria a través de la enunciación de mensajes	521
Araceli Limón Segovia	

TECNOLOGÍA EN LA ENSEÑANZA - PONENCIAS

Aprendizaje de conceptos y principios matemáticos a través del ambiente de programación y la computación simbólica. Propuesta metodológica	527
José F. Solanilla H., María G. Corrales G.	
El efecto de la calculadora en la enseñanza de matemáticas	533
J. Rodolfo Oliveros Angeles	
El uso de las calculadoras, las funciones y sus gráficas: estudio de la relación entre el pensamiento analítico y visual en las estrategias de los estudiantes	539
Miguel Solís Esquinca, Francisco Cordero Osorio	
Experiencia de los niños venezolanos con la calculadora	545
Sandra Leal Huise, Amanda Pérez Gómez	
Explorando polinomios de Taylor con TI-92	551
Edison de Faria Campos	
Explorando transformaciones de funciones con una calculadora gráfica	557
Armando M. Martínez Cruz	
Implementación de una estrategia pedagógica y de la teoría de los conjuntos de frontera imprecisa en el tutorial inteligente SALOMON	562
Lourdes Melgarejo Pérez, Fernando López Irarragorri, Alfredo Jesús Guerra Hernández	
La hoja de cálculo para la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato	565
Iris Angélica Zepeda Paredes, Jesús Roberto García Pérez	
La representación gráfica de modelos matemáticos	570
Dalia M. García de la Vega, Orlando Pérez González	

Las calculadoras como apoyo para la nivelación en aritmética en la escuela primaria	576
Patricia Martínez Falcón, David Block Sevilla	

Las construcciones geométricas a través de la computadora: un nuevo tema en la currícula del bachillerato	582
Armando López Zamudio	

Taller de matemáticas con computadoras como materia optativa: una alternativa para el nivel medio y/o medio superior	588
Mercedes Edita Alvarez Rivas	

TECNOLOGÍA EN LA ENSEÑANZA - TALLERES

Actualización de profesores mediante la investigación: un seminario teórico-práctico	595
José Ramón Jiménez Rodríguez	

La calculadora TI-92 y su impacto en la enseñanza de ciencias y matemáticas	601
Betty Ramírez, Keith Wayland	

Modelos matemáticos y el CBL	607
Betty Ramírez, Keith Wayland	

Taller de enseñanza de la aritmética asistido por computadora	612
Norma A. Hernández García, Ludwing J. Salazar Guerrero, Francisco Vega Hernández, Enrique R. Ojeda Barranco, Cornelio Yañez Marquez	

Taller sobre el uso del ordenador en el aprendizaje de matemática y en la resolución de problemas	615
Ana María Simoniello de Alvarez	

¿ TI-92, revolucionará la enseñanza de los cursos de matemáticas del nivel superior ?	618
Marta Rosas de Cancio, Jossie V. de Varona	

ÍNDICE DE AUTORES	623
--------------------------------	------------