IP 1108-11-213-94
N.2 Informe Final

008088

Santafé de Bogotá, agosto 24 de 1.997

Doctora
MYRIAN HENAO
Directora División de Estudios
Científicos de la Educación.
COLCIENCIAS

Apreciada doctora Henao.

Para responder a las observaciones realizadas por el evaluador al Informe Final de la investigación "Una propuesta didáctica para la construcción de los conceptos de función, función lineal" Cod1108-11-213-94. Ct.:014-95 debemos señalar como primera instancia que remitimos de nuevo el Informe pero siguiendo las orientaciones metodológicas precisadas y enunciadas en su introducción (Cf: Informe Final, pg 1) como es el reconocimiento al uso de las metodologías que en la actualidad orientan el desarrollo de la investigación en *Educación Matemática*, por la comunidad internacional. Atendiendo a esta precisión y a las orientaciones solicitadas por COLCIENCIAS para no incluir en la presentación de proyectos ni en los informes largas disquisiciones sobre paradigmas y metodologías los resultados se presentaron en formatos para su publicación.
No desconocemos, que desde el inició del proceso de evaluación uno de los evaluadores ha insistido en la necesidad de incluir diseños cuasiexperimentales. Pero teniendo en cuenta uno de los objetivos esenciales del proyecto como es el Reconocimiento de la Didáctica de la Matemática (o Educación Matemática) en la formación de maestros, como campo profesional e investigativo, hemos seguido los lineamientos que permiten hoy reconcerla como una disciplina autónoma en vías de construcción. Este acercamiento, si bien puede ser una primera aproximación del grupo, intenta ser sistemático puesto que ha sido retroalimentado con la asesoría de expertos internacionales, financiados ya sea por el mismo proyecto, como es el caso de la doctora Rosa María Farfán y por la formación permanente de los miembros del grupo en seminarios de carácter internacional y nacional sobre las temáticas

especificas de esta disciplina, junto con la confrontación pública de los diferentes avances del proyectos a expertos nacionales e internacionales en la disciplina , como también a profesores de la secundaria, tal como lo describen las actividades realizadas por el grupo en el Avance y en el Informe Final.
En razón a estos referentes presentamos unas consideraciones de carácter general en lo que concierne tanto a los aspectos metodológicos como a la disciplina de la Educación Matemática, con la intención de responder al evaluador algunas de sus cuestionamientos pues son necesarios para proceder a la emisión de juicios. Son también respuesta a algunas de las observaciones que realiza el evaluador en general sobre la investigación, pues en su juicio sobre el Avance de investigación (agosto de 1996) destaca *el avance teórico y conceptual* del proyecto. No entendemos entonces como descalifica la presentación conceptual sobre la Génesis de la función lineal, puesto que allí lo destaca como documento relevante
Finalmente, no desconocemos, que en algunos análisis, las conclusiones no son lo suficientemente analíticas pues no recogen lo relevante del estudio, en este sentido, el Informe recoge estas sugerencias. Así mismo, tal como lo propone el evaluador sí estaríamos interesados en el encuentro puesto que es de vital importancia, poner de presente las características tanto de la Educación Matemática como de sus avances para el establecimiento de metodologías especificas..
Reiteramos que nuestra intención al elaborar como introducción los referentes del campo de la Educación Matemática y de sus metodologías tiene la clara intención de contribuir al reconocimiento de esta disciplina, y a la divulgación que tanto los proyectos académicos (especializaciones, maestría y doctorado) como los diferentes grupos de investigación, hemos venido haciendo en el país con el fin de asentar y contribuir a su desarrollo como disciplina y a su reconocimiento como campo profesional y de investigación.

Cordialmente

Gloria García

Gloria García O　　　　Celly Serrano　　　　Luis E. Espitia

Consideraciones Generales:

En general puede afirmarse sin lugar a dudas que la Educación Matemática centra su atención hacía cómo y qué parte de las matemáticas es o puede ser, enseñada y aprendida en la escuela, en caracterizar tanto como sea posible con el mayor grado de rigor la actividad teórica y práctica que aparece vinculada a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En este sentido formula sus propias cuestiones y sus propias formas de tratarla. Empleando una simplificación, quizás excesiva, el énfasis sobre qué contenidos matemáticos se enseñan y se aprenden es su gran distinción de las raíces de la investigación psicológica sobre el pensamiento puesto que esta última coloca el acento en las diferencias individuales o diferencias de grupos en actuaciones bajo condiciones tipificadas, y hasta fechas muy recientes este tipo de investigación ha ignorado virtualmente las influencias sociales y culturales del pensamiento, aspecto que caracteriza hoy la investigación educativa.
Este énfasis también la distingue de la otra tendencia en psicología, la que trabaja con los efectos de los tratamiento de instrucción, en éstas, el conocimiento matemático, es definido operacionalmente como variable y en lo posible cuantificable. Casi siempre en esta tendencia se asume a la matemática como un cuerpo de conocimiento ya elaborado y por tanto el papel del profesor o del investigador es diseñar estrategias de transmisión. Por esta razón controles tales como la asignación aleatoria de los sujetos a los tratamientos, permiten inferir la validez o confiabilidad de la investigación.
Con estos referentes, es que desde la formulación del proyecto (Cf: Proyecto Una propuesta didáctica para la construcción de...., julio de 1.994) se ha enfatizado en la consideración de los fenómenos de enseñanza y aprendizaje desde la perspectiva del enfoque sistémico, es decir que los hechos didácticos no pueden ser explicados por el estudio separado de cada uno de los componentes del sistema conformado por la triada conocimiento matemático- profesor -alumno. Retomamos aquí el significado del término alumno, puesto que se considera un sujeto piscológico y al mismo tiempo social, pero un sujeto que conoce en una determinada situación de enseñanza. Esta elección es esencial puesto que nos interesamos en la relaciones y las condiciones de significación que el alumno puede establecer con el dominio especifico tanto de las función, como de la función lineal.
El sistema didáctico reposa sobre las relaciones especificas constituidas por las tres componentes de la triada descrita. El alumno no entra como integridad sino como sujeto didáctico, y con una historia .El profesor es un sujeto con historia propia, la que se manifiesta en una ideología privada y en la que se mezclan opciones especificas sobre el modo en que los alumnos aprenden matemáticas, cómo se

enseñan, posee una epistemología de las matemáticas y un conocimiento especifico de los distintos contenidos matemáticos. El profesor adquiere este saber en instituciones por lo que su relación con el saber profesional esta mediado por lo institucional. El saber a enseñar también tiene una historia particular, mantiene relaciones culturales con el exterior del sistema didáctico. Estos factores imponen restricciones en las relaciones de la triada pero a su vez, el sistema como tal es una estructura condicionada por factores externos institucionales. Resaltamos este punto de vista, puesto que aporta en el sentido de reconocer la presencia de lo institucional, como un saber que determina necesariamente características del saber a enseñar, se encuentra en los programas oficiales, en los textos, pero también en sus posibles interpretaciones, maestro, alumno).

Una primera consideración que se deriva es reconocer que el saber matemático, sufrirá un tratamiento especial, puesto que no es una simplificación del saber científico, muy al contrario, las matemáticas cuando son trasladadas al ámbito escolar adquieren una historia y una epistemología particular. En consecuencia para elaborar sistemas didácticos cognitivamente coherentes es necesario integrar el estudio de todo el complejo sistema de adaptaciones y restricciones que sufre el saber formalizado científicamente hasta llegar a convertirse en un saber adaptado a la enseñanza escolar interpretado y aprendido por profesores y estudiantes.

Con estas consideraciones a continuación describimos grosso modo las dos metodologías utilizada para los diseños de las unidades correspondientes a los grados sexto y séptimo.

A. La ingeniería Didáctica: Hacía la noción de función como dependencia, grado sexto

Una consecuencia que se deriva del enfoque sistémico para la didáctica de las matemáticas es que es necesario atrapar la complejidad del sistema estudiado", (Chevellard, 1982), pero las metodologías externas "(en tanto son externas a la clase) como cuestionarios, entrevistas tests, son insuficientes para pues si bien pueden garantizar el control empírico y al mismo tiempo el producto como resultado científico no garantizan la *elaboración teórica del sistema didáctico*, la cual es una necesidad para la Didáctica de la Matemática (Chevellard, 1982), puesto que por la juventud teórica del campo se requiere de poner en práctica construcciones teóricas elaboradas.

Es en este sentido que como metodología la ingeniería didáctica se caracteriza en "primer lugar por ser un esquema experimental basado en realizaciones didácticas en clase, es decir sobre la concepción realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza, en el registro de estudios de caso, y cuya validación es interna" (Artigue, 1995, p. 37). Esta característica la diferencia notablemente de otros tipos de investigación basados en la experimentación en clase, "pues por lo general (éstas últimas) se sitúan dentro del enfoque comparativo con validación externa, basados en la comparación estadística del rendimiento de grupos experimentales y grupos de control" (Artigue, 1995, p. 37), más no en las elaboraciones teóricas necesarias para el diseño experimental. Otro de los aspectos determinantes que plantea la ingeniería didáctica es el referido a la replicabilidad y generalización de los estudios puesto que las condiciones de replicabilidad estas asociadas a las historias de cada una de los elementos que conforman la triada, y a lo institucional . Para aclarar el problema de replicabilidad, Brousseau (1981) señala que este proceso en la didáctica debe contrastarse con la reproducción que años tras año realizan los profesores de sistemas didácticos, desnaturalizando las condiciones didácticas que garantizarían una significación correcta de las reacciones e historias de estudiantes, maestros y saber matemático. Este fenómeno característico de la actividad práctica de la docencia y garantizado en alguna ocasiones por los resultados de investigación de corte positivista ha hecho crear la ilusión de la *atemporalidad de los sistemas didácticos*, por esta razón habría que cuestionar la hipótesis de replicabilidad del mismo proceso didáctico. Brosseau "elabora la hipótesis de la obsolescencia, pues si se produce tiene la tendencia a hacer evolucionar las situaciones didácticas de la ingeniería",(1.981) en el sentido de adaptaciones de las situaciones de los actores y de lo institucional. Con este aporte se entra a evidenciar que la investigación del complejo sistema didáctico y su funcionamiento en clase se asemeja más a un punto de vista dinámico de sistemas caóticos que a considerarlo un sistema estable a los cuales se refiere el modelo ingenuo de la investigación de la relación enseñanza aprendizaje desde la concepción proceso producto.

Las fases que acompañan la elaboración de una ingeniería didáctica son: los análisis preliminares, el análisis a priori, experimentación, análisis a posteriori y validación. El proceso de validación es interno y como señala Artigue "*no cae en trampas de los esquemas usuales de validación estadística asociados a la experimentación en clase, que consisten fundamentarse implícitamente en el principio de que las diferencias mensurables constatadas se relacionan con las variables de comando sobre las cuales se ha influido para diferenciar clases experimentales y clases de control*" (1995, p48).

Finalmente reseñamos de la doctora Artigue la siguiente cita en cuanto aclara una argumentación de la evaluación: "*Un análisis apriori debido a su extensión es prácticamente incomunicable en toda su extensión. Lo que se publica y se ve desde el exterior no es, salvo como ejercicio académico, un producto que se ciñe a la*

descripción teórica. Más bien es una condensación de tal producto. Esta cita nos permite aclarar que la elaboración teórica - Hacia la noción de función como dependencia, especificamente en lo concerniente a la modificaciones que se ofrecen al discurso matemático tradicional, - Función como clase especial de relación, función como transformación- que se genera al diseñar una ingeniería didáctica es una de las características de esta metodología, puesto que se presentan los fenómenos y los procesos subyacentes a la construcción de los aspectos rigurosos de conceptos y teorías matemáticas.
Esta elaboración tiene su fundamento lógico en la fase de los análisis preliminares, específicamente en la elaboración del análisis histórico-epistemológico en la cual se reconstruye la fenomenología intrínseca del concepto de función en su génesis , lo que nos provee de los significados subyacentes a los conceptos matemáticos en su génesis histórica. Es evidente entonces que la publicación de los resultados de este tipo de análisis son una condensación teórica y evidentemente no son resultados que enfatizan los aspectos mensurables tradicionales en la investigación didáctica.

B. El diseño de investigación y los aspectos metodológicos de los cambios cognitivos llevados a cabo durante el proceso de instrucción: El caso de la proporcionalidad como función lineal.

La investigación en este dominio se distingue de los estudios de los procesos de enseñanza y de las investigaciones sobre el aprendizaje en tanto estudia las cogniciones de los niños durante la instrucción de *un dominio de contenido especifico escolar* para llegar a comprender sus efectos. De nuevo la elaboración de este contenido exige por parte de los investigadores *un análisis conceptual profundo*, el cual puede fundamentarse tanto en la evolución conceptual como en un análisis histórico epistemológico. En este sentido es diferente de la primera, en cuanto esta se centra en los procesos instructivos sin considerar la materia especifica que se enseña, para el caso de las matemáticas, persiste también la concepción de asumir la matemática escolar como un conocimiento inmutable. De igual manera se deduce la diferencia con las investigaciones sobre el aprendizaje en cuanto esta última se centra en la estructura del conocimiento de los niños, sin considerar el proceso de enseñanza. Es pues desde esta perspectiva que se hace necesario presentar las características de las situaciones problema desde el dominio conceptual y no se exige en este modelo de investigación pretest alguno.
En razón a esta consideración la comprensión del cambio cognitivo durante la instrucción requiere de *centrarse en los procesos cognitivos específicos de dominios particulares, tópicos concretos del curriculum escolar, lo que implica*

descripciones detalladas de la instrucción diseñada explícitamente para promover el cambio.
Las componentes metodológicas para elaborar el diseño son:

- Identificar el dominio
- Identificar los procesos cognitivos que son claves para el desarrollo con éxito del dominio
- Diseñar una secuencia de instrucción que promueva el uso de estos procesos cognitivos
- Evaluar los cambios cognitivos a través de las estrategias empleadas en la resolución de tareas.

Lo que implica necesariamente para elaborar el diseño: caracterizar *el dominio de contenido* para poder diseñar las tareas; caracterizar los procesos *cognitivos característicos del dominio,(Lesh, Landua,1983; Vergnaud, 1983)*

C. Acerca de la Validez y la Fiabilidad

Tiene razón el evaluador cuando cuestiona los criterios de calidad en términos de la Fiabilidad entendida como la medida en que se puedan replicar los estudios por cuanto desde la concepción tradicional, esta se garantiza siempre y cuando otro investigador que utilice los *mismos métodos* pueda replicar los estudios. Pero ello ha venido planteando serios problemas a la investigación educativa en general, y en particular tal como lo hemos descrito es cuestionado por la Didáctica de las Matemática. Tal como se deduce el contexto de esta investigación son los comportamientos naturales, es decir la el funcionamiento de los diseños en el aula, lo que hace imposible postular la unicidad y la idiosincrasia en la replica de situaciones de funcionamiento didáctico.
Para lograr la Fiabilidad externa de los datos, se intenta dar solución a los siguientes cuatro problemas: estatus del investigador, la selección de informante, las situaciones y condiciones sociales, los constructos y premisas analíticos y los métodos de recogida y análisis de datos (Goetz y Lecompte, 1988, p.217).
El problema de la Fiabilidad interna hemos acogido los criterios que desde la investigación cualitativa se plantean, la coincidencia entre varios investigadores que actúan en un solo estudio.
La Validez plantea el problema de la justificación de nuestras interpretaciones, el problema se centra entonces en el cuestionameinto a la confianza con la que podemos reclamar que nuestros resultados surgen de las condiciones experimentales y de la habilidad para generalizar los resultados a otras condiciones y circunstancias. Lo que explícita de nuevo el problema de los métodos utilizados como garantes de la

posible generalización pues la extrapolación se logra gracias a los análisis estadísticos utilizados, los cuales garantizarían las correspondencias de transferencia de un estudio a otro. Desde estos presupuestos hemos utilizado la propuesta de Goetz y Lecompte (1988) para quienes según el alto grado de validez interna viene también avalado por:

> "- La convivencia de los participantes, es decir la propia participación de los investigadores.
> - La realización de la investigación en un escenario natural
> - El proceso de autovigilancia de los investigadores - subjetividad disciplinada, por lo que se hace necesario someter todos las fases de la investigación ha un cuestionamiento y reevaluación continuo"(p. 224).

En la búsqueda de la generalización de resultados a partir de la transferencia de un estudio de caso a otro, nos hemos apoyado en Firstone (1993) quien propone que la conexión entre un caso descrito y la situación en la que se puede aplicar no se lleva acabo tanto por criterios formales de correspondencia, como a través del conocimiento implícito del lector, es decir la responsabilidad de la transferencia pasa del investigador al lector que quiera aplicar los resultados. En razón a esta consideración se tiene la responsabilidad de proporcionar una descripción detallada y profunda de todas la componentes de la investigación, en consecuencia y muy en particular, la presentación del contenido matemático escolar que se modifica es parte sustancial de la presentación de los resultados, pues es una determinante del amplio rango de aspectos del proceso estudiado.

Toda la información detallada de la construcción del diseño con los objetos matemáticos descritos de manera amplia y profunda son indispensables para las posibilidades de replica y generalización pues ellas constituyen el conocimiento profesional del profesor; igualmente la descripción de las competencias que se presuponen tiene los estudiantes hacen parte del proceso de presentación de resultados. Son pues estas razones las que nos permiten afirmar que la generalización mediante la extrapolación a partir de muestras con técnicas estadísticas, queda por completo fuera de nuestra intenciones, dado el carácter de esta investigación y los fines.

D. Acerca de los cuestionamientos a los aspectos metodológicos

Teniendo en cuenta que los fines de la investigación no son los de verificar y de confirmar teorías, sino que la investigación se orienta a estudiar el funcionamiento de los diseños didácticos para elaborar un análisis del comportamiento y su significado en la interacción social del aula, las técnicas de recogida de datos utilizadas han sido:

- participación intensiva en el aula
- registro cuidadoso de lo que acontece, mediante notas de campo y recogida de evidencias documentales, (trabajo de lo alumnos, cassette, video, etc)
- reflexión analítica a partir de los registros realizados

El análisis de los datos es de carácter inductivo, utilizando las técnicas de Triangulación de tipo: a) investigadores, grupo, asesores y pares; b) triangulación de datos, utilizando fuentes como documentos escritos, grabaciones de audio y video.

A. Hacia la noción de función como dependencia: Una propuesta de situaciones didácticas para el grado sexto de Educación Básica Secundaria.

Este estudio busca propiciar que los estudiantes accedan a un discurso matemático escolar sobre la noción de función como dependencia, a partir de las intuiciones originales que dieron lugar al concepto. Para lograr este objetivo, se reconstruye el discurso matemático tradicional acerca del concepto de función como clase especial de relación. El diseño las situaciones que dan acceso a este tipo de adquisición se fundamenta en la metodología de la ingeniería didáctica. Por consiguiente se elaboró el siguiente análisis preliminar:

A.1. Análisis preliminar

A.1.1. Análisis histórico epistemológico del concepto de función.

Este análisis se fundamenta en la evolución histórica del concepto caracterizando las diferentes concepciones de carácter cultural, para lo cual nos hemos apoyado fundamentalmente en los trabajos de Youshkevitch (1976), Rene de Cotret (1988), y Sierpinska (1989,1990)

Para elaborar el análisis hemos utilizado las siguientes categorías y descriptores, propuestos por Artigue (1989): estudio de las situaciones problemáticas tratadas en los distintos períodos históricos, los invariantes de los que se ha tomado consciencia colectiva y las distintas representaciones simbólicas asociadas.

Como resultado de este estudio hemos identificado siete concepciones (García, G., Serrano C., Espitia L., 1995) en las cuales se muestra que en el largo proceso de abstracción -3.700 años-, el concepto ha pasado de un estatus operacional a un estatus estructural, perdiendo el carácter dinámico de asignación entre variables, para poner de relieve una caracterización más estática como colección de parejas ordenadas. Así mismo se puede concluir que la idea primitiva de función estaba asociada a las nociones de cambio y de relación entre magnitudes variables, las representaciones asociadas eran la tabla, la gráfica y la expresión analítica. La necesidad de establecer su carácter estructural obedeció a la formulación de teoremas generales sobre relaciones entre variables y a organizar teóricamente el estudio de clases y espacios de funciones.

Las consideraciones generales de tipo pedagógico que se derivan y son acordes a los estudios cognitivos (concepciones de estudiantes) son entre otras, las siguientes:

- Es necesario tomar consciencia de que la introducción de definiciones formalizadas antes de que los estudiantes tengan un sentido y un cierta cultura matemática sobre el carácter de las definiciones se convierte en un obstáculo didáctico para el desarrollo del pensamiento matemático

- Los estudiantes están más interesados en explicar los cambios, encontrar regularidades en los cambios, en explicar fenómenos de la vida cultural y social donde las funciones aparecen como modelos de las relaciones que se observan.
- Los contextos de las tareas deben tener como escenarios fenómenos de la vida cultural y científica
- En cuanto a los prerrequisistos son necesarias herramientas algebraicas tales como la construcción de la variable en su aspecto dinámico
- Es importante proveer a los estudiantes de un amplio espectro de representaciones de la función.

A.1.2. Análisis cognitivo

1.2.1 Concepciones de los estudiantes

El estudio de las concepciones se apoya en los realizados por Vinner (1983) y Ruiz Higueras (1994). Se consideraron, dos tipos de concepciones, acogiendo la propuesta de El Bouaizzaui,: *concepciones inducidas no intencionalmente por la enseñanza* y *concepciones inducidas intencionalmente por la enseñanza.* Las primeras se consideran construidas por los estudiantes como resultado de su interacción con su medio familiar, social y escolar y no incluyen un trabajo escolar directamente con el concepto, como es el caso de la concepción de función de los estudiantes de sexto grado de la Básica Secundaria. Las concepciones inducidas por la enseñanza son el resultado de un tratamiento escolar durante el cual se ha realizado un trabajo con el concepto, sus representaciones asociadas y sus aplicaciones; tal es el caso de la concepción de función de los estudiantes de octavo grado de Básica Secundaria.

El análisis didáctico descrito posteriormente, muestra cómo la concepción que se induce no intencionalmente del concepto a través de texto y programas curriculares es la función como operador. En consecuencia para los estudiantes de grado sexto hemos propuesto la concepción de función como transformación y para los estudiantes de grado octavo la concepción propuesta es la de correspondencia. Las tareas que permiten estudiar el carácter local de estas concepciones, recogen la propuesta de Vergnaud (1982,1990) para caracterizarlas. En razón a esta consideración se proponen tareas donde los estudiantes:

- reconocen invariantes que el sujeto asocia como notas que determinan el objeto transformación o función
- el conjunto de representaciones simbólicas que le asocia

-el conjunto de situaciones, problemas que el sujeto asocia al objeto, es decir para los cuales encuentra apropiado su uso como herramienta.

El instrumento utilizado para sexto grado fue una prueba con cuatro items y seis preguntas; la prueba para grado octavo constaba de cuatro items y catorce preguntas. Los items y sus preguntas, sus objetivos, categorías e indicadores están descritos en el Informe de Avance (agosto de 1996). En cuanto a la validez de la prueba se asumió la validez de Contenido (López Feal, Messick, 1990), su base lógica se aseguró mediante el análisis histórico epistemológico del concepto, el estudio de programas curriculares, propuestas didácticas y de los textos usados en las instituciones en donde se aplicó la prueba. La base empírica se fundamenta en pruebas similares con el mismo objetivo realizadas por Vinner- Dreyfus y Ruiz Higueras. La confiabilidad se aseguró a través de: adecuación de las tareas (en los items) a las tres componentes a observar; sometimiento a juicio de expertos y diseño y aplicación de una prueba piloto.

Las pruebas fueron aplicadas a 28 estudiantes de sexto grado y a 24 de grado octavo respectivamente, que cursaban estudios en diferentes instituciones (colegios oficiales y privados de la ciudad de Bogotá), lo cual permitió mostrar el carácter y la presencia institucional de la relación al saber de las funciones en los estudiantes.

Resultados:

La mayoría de los alumnos de sexto grado (62%) asumen la transformación como cambio; como algo que produce resultados(60%); como la operación que se realiza sobre un elemento para cambiarlo(35%); como lo que cambia con el cambio de otra cosa, expresión aceptada por los investigadores como una concepción de dependencia (29%) y no recurren explícitamente a expresiones como acción, máquina, correspondencia o dependencia ni identifican claramente qué es lo que cambia ni tampoco cómo se da el cambio. Los ejemplos presentan coherencia con la definición informal, son formulados en escenarios cotidianos (34%) y en escenarios científicos de las Ciencias Naturales (43%).

El cuadro numérico (Tabla) aparece con muy baja frecuencia (3%) y manejado como lo presentan tanto el programa curricular como los textos de la Básica Primaria; el cuadro geométrico está ausente de los ejemplos mostrando el poco manejo que de él tienen los estudiantes. La representación priorizada por los alumnos es la verbal, la tabla es usada por un solo alumno y no aparece la representación gráfica en ninguna forma. Es de importancia aclarar que en general para los alumnos de sexto grado el cambio no aparece asociado a la variación y a la dependencia porque solo establecen el cambio entre un único par de elementos, aceptando sin discusión y sin poner en duda que algo que cambia no puede generar dos o más objetos diferentes, este hecho revela la presencia prolongada de tareas realizadas en la primaria para reconocer las correspondencias biunívocas

Los alumnos de octavo grado identifican a la función como una relación especial unívoca (25%), como una correspondencia en la cual no especifica necesariamente la unicidad (22%) y sin reconocer la asimetría de los conjuntos que identifica como Dominio y Rango en la definición formal (13%). Los escenarios de los ejemplos no siempre muestran coherencia (solo el 32%) con la definición dada, se formulan en el cuadro algebraico, las expresiones afines y cuadráticas son las más utilizadas aunque los ejemplos dados no siempre explicitan la unicidad. En las justificaciones dadas al identificar funciones se presentan la unicidad (23%), por el tipo de gráfica (28%), por la expresión simbólica que debe incluir f(x) (16%) y en algunos casos (10%) apelan a explicaciones en donde se evidencia la dependencia.

La representación asociada al concepto de función es la gráfica cartesiana (36%), la fórmula simbólica (36%) y esporádicamente la tabla. Aunque la concepción de dependencia está presente en un mínimo porcentaje de los estudiantes, en general puede afirmarse que es la concepción vehiculada por la enseñanza la que predomina en los estudiantes. La función como herramienta modeladora de situaciones no es útil para los estudiantes puesto

Es de anotar que el análisis de los datos en una misma institución evidencian tendencias de concepciones institucionales puesto que se presenta el concepto como terna con sus representaciones asociadas, o la tendencia hacía la concepción de función como fórmula

1.2.2 Concepciones de maestros: la variable institucional

Acorde al enfoque de la investigación el carácter sistémico de la didáctica, el estudio integra la variable institucional como variante explicativa de las concepciones de maestros y estudiantes. Esta variante va más allá del estudio de las concepciones cognitivas pues resalta de un lado, el carácter institucional en la construcción del significado, y de otro cuestiona los procesos de transferencia de resultados y su replicabilidad basados en la constación del uso de métodos científicos. Así mismo refuerza los presupuestos del marco de referencia, puesto que si uno de los productos de la investigación en Didáctica de la Matemática es la reconstrucción del discurso matemático escolar, el conocimiento profesional debe ser uno los aspectos fundamentales a modificar, puesto que el conocimiento profesional no radica en el manejo de actividades técnicas que mejoren la práctica en el aula.

Por ser este un campo de investigación reciente, presenta problemas metodológicos delicados; por esta razón, la construcción del modelo teórico para establecer las relaciones entre factores externos e intrínsecos en la evolución del desarrollo del conocimiento del profesor respecto al concepto de función en procesos de profesionalización busca ser un intento para avanzar en superar las dificultades al respecto.

El método empleado en el estudio consistió en un estudio de caso de 7 estudiantes-profesores de matemáticas en la Educación Básica con experiencia en los niveles escolares donde se enseña el concepto de función a alumnos entre 14 y 17 años en Santafé de Bogotá. Cabe anotar que estos docentes procedían de una muestra más amplia, la cual permitió una elección ajustada a nuestros intereses.

Para lo institucional los datos fueron extraídos del programa de formación y de la situación de aprendizaje del concepto de función, formulada en un texto en el cuál se describen los aspectos referidos al concepto y las orientaciones didácticas para su enseñanza y aprendizaje. Se elaboró un análisis de las concepciones inducidas, – invariantes asociadas, representaciones y situaciones de empleo del concepto – junto con un análisis de contenido (Webber, 1986) sobre las siguientes variables: modo de presentación de los conceptos teóricos respecto a los problemas y ejercicios; definición presentada para el concepto de función; ejemplos propuestos; relación establecida entre la función y los objetos matemáticos relacionados con ella: gráfico, dominio, rango, etc.; y ejercicios propuestos.

Para el conocimiento sobre el concepto de función se replica el estudio de Alexander Norman (1.990) quien propone identificar el conocimiento de función desde la comprensión. Norman considera la comprensión determinada por la comprensión instrumental y la relacional. La primera esta referida a una comprensión algorítmica de un concepto, el sujeto aplica reglas o fórmulas para resolver situaciones sin saber el porqué de la elección de esa herramienta ni cuál es su relación con el concepto. Por ejemplo, la línea vertical para determinar si una representación gráfica, corresponde o no a una función, puede ser asumida por el sujeto como una técnica que siempre le permitirá determinar cuando una expresión es función o no. En la misma forma, la identificación en un **y** separado de un **x** por = puede ser asumida como algoritmica, puesto que el = garantiza la unicidad de la correspondencia entre el valores de **x** et **y** . En la comprensión relacional se establecen la relaciones entre el concepto y los procesos asociados, por consiguiente el sujeto puede seleccionar en cuáles situaciones puede usar el concepto y los procesos adecuados . Para el caso del uso del test de la línea vertical, por ejemplo, se tiene una comprensión relacional cuando el estudiante discrimina la situación en donde es aplicable. Con base en esta teoría, Norman identifica los siguientes aspectos para determinar la comprensión de función:

1. Ejemplificación y caracterización de funciones realizadas a través de la definición personal y formal y los ejemplos correspondientes.

2. Habilidad para el uso de funciones en una variedad de contextos: aplicaciones del concepto en situaciones de la vida real científica.

3. Razonamiento funcional: habilidades de interpretar, generalizar y deducir propiedades relativas a las funciones en representaciones gráficas, algebraicas y tabulares.

Por conocimiento profesional se designa al proceso por el cual se integra el conocimiento del objeto de función con las representaciones de cómo deber ser enseñado – fines y objetivos, motivación y errores –.

Los datos son extraídos de un prueba con tres items referidos a los aspectos descritos. en la cual las declaraciones y argumentaciones de los profesores son tenidas en cuenta para determinar la coherencia. Se realizó un análisis vertical en un mismo individuo y un análisis horizontal entre individuos con el fin de minimizar las diferencias interpretativas.

Resultados:

Una primera conclusión que se extrae del análisis del texto del programa para cualificar a los docentes es la excesiva valoración sobre el componente científico de las matemáticas en el dominio de las definiciones, considerando los problemas didácticos como una cuestión técnica. La carencia formativa en cuestiones especificas de su profesión tales como teoría de aprendizaje, didáctica de los dominios específicos produce como resultado la desconexión entre la teoría y la práctica como lo revelan las situaciones de motivación que proponen los profesores para introducir el concepto (García, G., Serrano C., Espitia L., 1997). La ausencia de una formación sólida teórica sobre fundamentos del currículo de las matemáticas escolares, sobre los principios para el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas redunda en la calidad de la enseñanza que ofrece, tal como se deduce de los ejemplos de situaciones que presentan los profesores para enseñar el concepto.

Esta ausencia junto con el dominio del contenido como una técnica, deja a un lado la posibilidad de que la actuación del profesor de matemáticas sea considerada como la de un educador, es decir, como un profesional intelectualmente autónomo y critico responsable de sus actuaciones. Pues de un lado se deduce que sólo alcanza una comprensión instrumental del concepto y del otro, hay un déficit del conocimiento didáctico que necesita todo profesional de la educación.

En lo concerniente al conocimiento del profesor sobre el objeto de función se puede afirmar que las definiciones personales revelan una concepción restringida del objeto puesto que para su identificación necesitan comprobar la unicidad de la correspondencia.

La representación asociada, usada por todos los maestros con preferencia, es el diagrama sagital. La representación gráfica cartesiana sólo es utilizada por un profesor, después de haber dado valores numéricos –naturales– a una expresión algebraica, buscando mostrar la correspondencia. Cuatro de los siete maestros utilizaron la *máquina,* interpretada como procesador u operador que actúa para obtener un resultado en su definición informal. Esta definición aparentemente se aparta de la propuesta en el Programa de Formación pero corresponde a la que promueve el programa curricular vigente y es coherente con las respuestas de los maestros a la pregunta sobre fines y objetivos de la enseñanza del concepto de función en la educación básica, pues todos definen su importancia por ser "*un tema del Currículo*"

A pesar de la amplia experiencia en su enseñanza y a la formación que han recibido (normal, licenciatura, curso especializado) no hay una aproximación a la comprensión relacional en los maestros. La comprensión es más de tipo instrumental puesto que se exhiben fijaciones de invariantes del concepto como $R \rightarrow R$.

No existe coherencia entre la definición supuestamente aprendida en el Programa de actualización y la definición informal que proponen los profesores; identifican la funcionalidad en ejemplos estándares, pero en situaciones funcionales complejas no pueden utilizar sus técnicas y tienen serias dificultades para construir e identificar funciones en situaciones del mundo real.

En general, la comprensión instrumental que presentan los maestros está estrechamente ligada a las invariantes didácticas presentes en textos, puesto que éstos, enfatizan la correspondencia unívoca, la representación sagital y herramientas algorítmicas de la función como fórmula.

Los ejemplos que formulan los profesores sobre situaciones funcionales, permiten detectar la dificultad que tienen para abstraer la propiedad cambiante, para identificar qué y cómo cambia.

A.*1.3 Análisis didáctico*

Este análisis tiene como objetivo estudiar la presentación que hacen los textos y programa del concepto de función, puesto que como hemos descrito, en la triada conocimiento matemático- alumno- profesor, intervienen factores externos que determinan en gran medida la posibilidades de construcción de concepciones. Además, el texto ocupa un papel protagónico en las situaciones didácticas como agente divulgador del saber que se desea sea institucionalizado. En particular, los textos en Colombia cobran un papel protagónico, por cuanto han sido los encargados de la divulgación de las reformas curriculares.
Para realizar el estudio del estado del objeto de función en textos se realizaron tres estudios. El primero se realizó sobre los textos de la Básica Secundaria (García G., S,errano C., Espitia L., 1996). En general puede afirmarse que los textos de secundaria acogen la definición bourbakista de función situándola no sólo en su carácter más abstracto sino también dentro de la versión estática pues la presentan como derivada de una clase especial de relación que se establece entre conjuntos. El énfasis en la **condición de valor único** es resaltado en diagramas sagitales - de correspondencias uno a uno, en la mayoría de las veces-

Los dominios de contenido de las tareas propuestas son parejas de números o de letras.

En la primaria, las operaciones aritméticas son presentadas bajo el modelo funcional en el que se considera que el primer miembro de la operación (sumando, minuendo o multiplicando) es un estado inicial y el segundo corresponde al estado final debido a un operador o transformador de aumento/ disminución que actúa sobre el estado inicial. Este acercamiento privilegia la representación esquemática de operador

Las tablas, son utilizadas para:

- representar las operaciones aritméticas en su sentido estático (mostrar ostensiblemente la correspondencia uno a uno.) ;
- explicitar operadores

El acercamiento a la función, no inducido intencionalmente por la enseñanza en este nivel es una enfoque de función como transformación. En cuanto a las nociones de cantidades variables puede afirmarse que tareas sobre fenómenos o situaciones de cambio no se contemplan dentro de la temática de la enseñanza en la escuela primaria. Las representaciones gráficas o tabulares de dependencia entre cantidades variables no son tareas contempladas en este nivel. Por estas razones, la aproximación a la noción de función en el grado sexto seguirá un proceso diferente a la presentación de función como relación que actualmente se impulsa en la enseñanza.

El segundo estudio analiza el contenido de la variación y la dependencia en 15 textos escolares de la década del 80 y del 90 (García, G., Serrano C., Espitia L., 1996). Las categorias de análisis fueron la interpretación y la construcción (Leinhart y otros, 1990) como resultado se concluye:

- Es evidente que la dependencia y la variación no son objeto de estudio en los textos usados en la escuela colombiana
- La definición de función que ofrecen tiene un alto grado de formalidad, se presenta al concepto de forma estática.
- Las representaciones asociadas son la sagital y la definición de función por la existencia de la expresión algebraica.
- La función y sus modelos se convierten en un fin en sí mismo y por consiguiente no son herramientas del trabajo matemático
- La interpretación como categoría que define la actividad cognitiva por la cual el estudiante da sentido a la gráfica como una totalidad o globalmente, no es una actividad propuesta en los textos, puesto que la gráfica se convierte en un punto de llegada
- Así mismo, la construcción como actividad cognitiva desde la cual se generan nuevos objetos de la función a partir de objetos conocidos, es decir, donde el estudiante trabaja entre sistemas de representación no se presenta en los ejercicios propuestos, puesto que estos tienen la connotación de su nombre, sólo ejercitan la memorización de la definición.
- Se encuentra el legado de la Reforma de la Matemática Moderna, pues se privilegian las representaciones proposicionales y diagramáticas y el concepto sufre una radical exfoliación del campo semántico que rodeó su evolución conceptual

El tercer estudio (García G., Serrano C., Espitia L., 1997) busca rastrear la forma como el objeto de función es introducido como objeto matemático institucionalizado. De aquí que se elabore un análisis de los textos y programas de las décadas del 60 y 70 pues fue a partir de la reforma de las Matemáticas Modernas cuando el objeto función se ennoblece en su estatus como objeto matemático escolar. El análisis realizado es de Contenido, utilizando el modelo propuesto por Weber (1986)en el cual se analizan: el modelo didáctico, definiciones, ejemplos propuestos y las relaciones establecidas entre la función y los objetos matemáticos asociados.
El resultado de este análisis permite confirmar la hipótesis formulada en el estudio del contenido de la variación y la dependencia en textos de la década del 80 y 90: el legado de la Reforma, la presentación del objeto de función como *un objeto demasiado grueso*, (García, G., Serrano, C., Espitia, L., 1997) pues las distintas versiones de las definiciones que presentan tanto programas como textos elevan su nivel de complejidad a tal grado que el concepto pierde su sentido quedando reducido a su algoritmización y al manejo de un simbolismo sin sentido. No es entonces de extrañar que si uno de los argumentos importantes de los maestros para su enseñanza es *porque esta en el currículo*, la presentación que hacen del concepto, siga fielmente los lineamientos de programas y textos; además al contrastar el tipo de objetos asociados al objeto de función, dominio, rango y función como fórmula, (García, G., Serrano, C., Espitia, L., 1997), asocien a la comprensión del concepto estos rasgos, y consideran que ésta sea la única herramienta para determinar cuando una situación puede ser representada por una función.

A.2 Análisis a Priori

En el curriculum convencional y en el conocimiento profesional del profesor no existe una aproximación al estudio de la función como dependencia, esta carencia supone una limitación para la enseñanza y aprendizaje de esta significación del concepto, al mismo tiempo que se convierte en una dificultad para la comprensión del estudio de la variación y para el uso de la función como herramienta conceptual modelizadora de situaciones de dependencia

A.2.1 *Análisis descriptivo*: Se seleccionan como variables macro-didácticas las asociadas al contenido:

1. Iniciar la construcción para el grado sexto de la Básica Secundaria de el significado de **la noción de función como expresión de dependencia entre**

variables (siempre referida a dos variables) nos interesa *el aspecto semántico de la dependencia expresada en representaciones gráficas, tabulares y verbales retóricas como expresiones de fenómenos de variación y cambio y orientar su comprensión hacía la perspectiva procesual.*

2. Desarrollar los prerrequisitos necesarios para el estudio de la función como dependencia, adaptados a las restricciones que exige el contexto didáctico del grado sexto de la educación básica
3. Limitar la complejidad de la variación y el cambio y sus representaciones asociadas al nivel prealgebraico

Para la variable descrita en el numeral 1, los objetos de estudio se definen como:

En el cuadro numérico Completar e interpretar tablas como procesos aritméticos que permiten el estudio de la variación y la dependencia. Predecir valores que toman las variables descritas en las tablas al comparar variaciones entre cantidades
En el cuadro gráfico: Representar la dependencia entre cantidades cualitativa y cuantitativamente. La selección de diferentes tipos de gráficas (lineal, parábola, por segmentos) constituye un elemento determinante para la construcción de tipos de variación
En *el cuadro prealgebraico*: Enunciar en forma oral y escrita la dependencia entre cantidades.

Para la variable correspondiente al numeral 2, se establecieron los siguientes objetos:
Cuadro Gráfico, Analizar la variación de cada una de las magnitudes asociadas en una representación cartesiana, ubicar puntos, incrementos y decrecimientos según el lugar que ocupan en relación a la lejanía o cercanía del punto cero de los ejes o entre si.
Cuadro Prealgebraico, Enunciar verbalmente expresiones retóricas para relacionar variaciones de cada variable.
Las variables locales están asociadas a la formulación de las situaciones didácticas:

1. Situación de acción y surgimiento: caracterizada porque el estudiante interactúa con la tarea desde los conocimientos y las competencias que posee.
2. Situaciones de formulación y validación: En la primera, los estudiantes comunican la información a otros alumnos, modificando su lenguaje habitual, introduciendo elementos más precisos del dominio de contenido matemático. La validación es también la comunicación de la información pero con explicaciones y argumentaciones propias del dominio de contenido..

3. Las situaciones de institucionalización establecen las convenciones sociales propias del contenido, se realiza con la participación del profesor.

A.2.2 *Análisis predictivo*: Se seleccionan como variables las referidas a las competencias de los alumnos.
Para **La noción de función como dependencia**: Las que *deben estar disponibles* y que según el caso se pueden convertir en ayudas u obstáculos son:

- Resolución de situaciones problemas como aspecto introductorio la construcción de ideas matemáticas
- Desarrollo de procesos aritméticos para resolver problemas numéricamente y como herramienta prealgebraica
- Interpretación de gráficas

Las competencias *que se esperan los estudiantes adquieran* son:

- Conjeturar sobre hechos globales (como es el cambio de la temperatura), sin establecimiento de medición puntual y exacta.
- Relacionar representaciones tabulares y gráficas con la representación de la dependencia.
- Enunciar por escrito la dependencia entre las cantidades representadas y formular generalizaciones de las mismas

Objetivos del problema:

- Usar tablas numéricas para analizar situaciones funcionales.
- .Anticipar a través de procesos aritméticos variacionales la noción de variable.
- Identificar la dependencia tanto en representaciones tabulares como gráficas

Variables predictivas para el desarrollo del prerrequisito (**Introducción a las gráficas como expresiones entre variables**)
Referidas a *las competencias que deben estar disponibles* en los estudiantes:

- Identificar magnitudes que intervienen
- Leer valores cualitativos correspondientes a las abscisas y ordenadas de cada uno de los puntos.
- Construir el conocimiento matemático a partir de la resolución de situaciones problemas.

Las que *se esperan adquieran* los estudiantes:

- Identificar la variación dentro de cada una de las magnitudes
- Comparar cualitativamente valores de una magnitud

- Identificar información dada a través de puntos
- Localizar puntos en un cuadrante utilizando información gráfica o escrita
- Trasladar información entre cuadros gráficos y verbales para obtener nueva información

Objetivos del problema :

- Instaurar el estudio de los gráficos como sistema de representación que codifica aspectos relevantes de la variación
- Construir herramientas para la interpretación aproximada de gráficos
- Introducir la noción de variación.
- Trasladar información entre cuadros

Restricciones

El uso de las gráficas al primer cuadrante, el dominio numérico es el de los naturales.

Dificultades

De temporalidad, en tanto la construcción de la noción de función como dependencia requiere de condiciones de tiempo más extensas y la experimentación del diseño fue limitada en el tiempo, por cuanto esta actividad no está comtemplada en la distribución del trabajo escolar.

De contenido, en cuanto a que el sistema de representación cartesiano como herramienta de expresión de situaciones de variación y dependencia no es tema de estudio en los grados anteriores; la variación aún en procesos aritméticos presente en las tablas tampoco es objeto de estudio; el limitado conocimiento de procesos numéricos como herramientas prealgebraicas.

Contexto escolar

La aplicación del diseño didáctico se realizó con 35 estudiantes del sexto grado, pertenecientes al Instituto Pedagógico Nacional. Los estudiantes no han tenido la oportunidad de trabajar formalmente con el concepto de función, no conocen la sintaxis del sistema cartesiano. El modelo de pedagogía es prioritariamente expositivo; el trabajo en grupo se ha desvalorizado en cuanto a su objetivo como trabajo cooperativo entre pares.

Diseño

El diseño se estructura integrando los prerrequisitos y problemas característicos de las situaciones de dependencia (Anexo 1)

C. Análisis de Resultados

Del conjunto de datos recogidos en la experimentación en los referente a las situaciones formuladas para los prerrequisitos, se puede concluir:

En cuanto a las competencias disponibles para el desarrollo del prerrequisito los alumnos identifican magnitudes (aprox. 74%) y leen información en las gráficas. (prom. 65%):

	Identificación de magnitudes			
Preguntas	SI	NO	OTRAS	No responde
Primera situación	26	5	2	2
Segunda situación	25	6	2	2

	Lectura e interpretación de la información gráfica.			
Preguntas	SI	NO	OTRAS	No responde
Primera situación	20	11	3	1
Segunda situación	22	7	2	2

En cuanto a las competencias esperadas, las siguientes tablas muestran los resultados correspondientes a la identificación de la variación (60%) y el establecimiento de conjeturas (71%)

	Identificación de la variación			
Preguntas	SI	NO	OTRAS	No responde
Primera situación	23	8	2	2
Segunda situación	19	9	4	3

	Establecimiento y uso de Conjeturas			
Preguntas	SI	NO	OTRAS	No responde
Primera situación	21	8	3	3
Segunda situación	29	6	0	0

Para los alumnos fue muy difícil realizar la traslación entre la representación verbal y la gráfica y viceversa porque presentan dificultades para poner por escrito lo que reconocen en las gráficas, los datos anotados muestran conjeturas que se dieron más en forma oral que escrita.

Objetivos del problema :

En cuanto a los objetivos propuestos, se puede afirmar que en un alto porcentaje los estudiantes los logran puesto que en las situaciones problema de la "Noción de función como dependencia" no encontraron dificultades orales para interpretar la variación de las magnitudes representadas en los gráficos. Esta competencia se muestra en la ejecución de la tarea 3 en la cual se solicita construir una gráfica para representar la variación de la temperatura. Igualmente el estudio en forma cualitativa de la variación se cumplió, puesto que la mayoría de los estudiantes logró interpretar la variación representada gráficamente en términos de reconocer crecimientos y decrecimientos de la variables relacionadas, así también algunos lograron enunciar por escrito, en forma retórica, la relación de dependencia. Esta competencia se evidencia por el número de estudiante que realizan la tarea de reutilización en un problema más complejo (Construir situaciones de variación representadas en gráficas cartesianas).

En lo referente a la variable contenido, específicamente, el trabajo en cada cuadro del problema se efectuó de manera aceptable, pero la traslación entre ellos presentó dificultades, debido a que la enseñanza de la matemática en este nivel solo prioriza el trabajo en la representación numérica.

En cuanto a los resultados de la aplicación de las situaciones didácticas para **la noción de función como expresión de dependencia entre variables**, se tiene:

Las competencias disponibles se dieron como aceptables. Por una parte, porque en el período anterior los alumnos habían desarrollado problemas dentro del dominio de los números naturales y por otra, en las situaciones propuestas para el desarrollo de los prerrequisitos, los resultados, en las tablas anteriores, muestran que habían logrado leer e interpretar gráficas e identificar la variación. En la tarea de rutinización y familiarización (Elaborar un gráfico de la variación de la temperatura en un día) se pudo constatar este hecho; los resultados se observan en la siguiente tabla:

	Calcular e interpretar variaciones			
	SI	NO	OTRAS	No responde
Situación única	30	2	2	1

En cuanto a *las competencias que se espera adquieran* los estudiantes, las siguientes tablas muestran en que grado se lograron:

	Conjeturar sobre hechos de la dependencia			
Preguntas	SI	NO	OTRAS	No responde
situación única	30	3	2	0

	Relacionar representaciones tabulares y gráficas.			
Preguntas	SI	NO	OTRAS	No responde
situación única	26	6	1	2

	Enunciar por escrito la dependencia.			
Preguntas	SI	NO	OTRAS	No responde
situación única	20	10	3	2

Aunque se logran las dos primeras competencias en forma amplia (86% conjeturar y 74% relacionar) la otra competencia muestra niveles bajos (57%) debido una vez más a la dificultad que tienen los niños para trasladar lo oral a lo escrito.
En la *Fase de Reutilización en problemas complejos* se propone al estudiante aplicar a una situación problema mas compleja, inscrita en un contexto diferente,. los conocimientos obtenidos en las fases de Acción o Surgimiento y en la de Formulación y Validación. En ella se evidencian una vez más las competencias adquiridas como lo muestra la siguiente tabla:

	Relacionar las diferentes representaciones de la dependencia			
Preguntas	SI	NO	OTRAS	No responde
situación bacterias	27	4	2	2

	Enunciar por escrito la dependencia entre cantidades			
Preguntas	SI	NO	OTRAS	No responde
situación única	18	9	6	2

Los estudiantes logran en un 77% proponer relaciones entre las diferentes representaciones de la variación y la dependencia ; sin embargo solo un 51% logra expresar en forma escrita la relación de dependencia entre el tiempo y el número de bacterias del cólera.

Al contrastar los objetivos definidos a priori para el problema con los resultados se puede afirmar que se lograron, puesto que los estudiantes desarrollaron las competencias para leer no sólo gráficas sino también tablas, para identificar y estudiar en ellas situaciones funcionales de dependencia, para modelar la variación y establecer rangos de variación aproximándose a la noción de variable de manera informal. La gran dificultad que se presenta es el paso de lo oral a lo escrito, pues las conjeturas se formulan oralmente.

Conclusiones

Los resultados obtenidos en la experimentación nos llevan a confirmar que la modificación de la variable contenido, en nuestro caso, la noción de función como dependencia, permitió la aproximación de los estudiantes a una construcción procesual del concepto. Igualmente esta confrontación nos permite confirmar la hipótesis inicial de trabajo: *la aproximación a la noción de función desde el cuadro numérico y gráfico otorga significación al concepto de función.* Esta es posible siempre y cuando se tenga el entorno institucional y cognitivo que enmarca la concepción de este concepto. Además permite identificar la necesidad del análisis preliminar por cuanto la introducción innovativa de un concepto supone mínimamente la construcción de prerrequisitos y el conocimiento de las concepciones de estudiantes para orientar una aproximación significativa a la concepción que se desea construir.

De otra parte, los objetos de estudio propuestos para las situaciones didácticas confrontados con los resultados obtenidos permiten inferir que son las tareas que intencionalmente diseña el maestro, las que permiten al estudiante establecer las relaciones y las condiciones para comprender y desarrollar competencias. Es pues el profesor el que tiene la responsabilidad de transformar y organizar, alrededor de problemas, los objetos matemáticos para permitir que el estudiante se apropie del conocimiento y lo utilice en situaciones más complejas.

Como se deduce, la transposición de estos resultados depende de los agentes a quienes se destina el diseño, pues el profesor debe modificar y vencer los obstáculos que le presenta su conocimiento sobre el mismo objeto matemático, en este caso la función, como también modificar el conocimiento profesional para diseñar situaciones didácticamente cognitivas. Así mismo, del carácter institucional, por cuanto el programa y el tiempo destinado para la realización de este tipo de diseños, la mayoría de la veces, esta fuera del control de los maestros.

Una conclusión general es reconocer la complejidad del proceso de preparar matemáticas escolares, puesto que uno de los aspectos centrales involucra la epistemología de los conceptos para buscar la significación y establecer de esta forma la transformación de herramientas en objetos (procesual-estructural, dinámico-estático). Una modificación de las matemáticas escolares, en nuestro sistema educativo, requiere el estudio de la incidencia de los tratamientos epistemológicos cuya profundidad no ha sido requerida en nuestra tradición, con el fin de orientar el problema de la enseñanza de las matemáticas hacía el aprendizaje

B. La proporcionalidad directa como función lineal

La función lineal tradicionalmente en programas curriculares textos y enseñanza, ha sido inscrita en el cuadro algebraico definida por ecuaciones como $[f(x) = mx + b]$ y /o $y = K.x$ y por su gráfica una recta, sin embargo los estudios sobre los aspectos matemáticos del concepto de función lineal y la proporcionalidad entre magnitudes, Freudenthal (1983); Verganaud (1983,1991); Fiol, Fortuny (1990) y Azcaráte, Delefou (1990) muestran el isormofismo existente entre estos conceptos Específicamente, los trabajos de Freudenthal (1983) y Verganaud (1991) sobre la Proporcionalidad y la Estructura Multiplicativa proponen iniciar su estudio desde la matemática de las cantidades en la básica primaria en situaciones problema caracterizadas por escenarios numéricos y gráficos.

La característica matemática para establecer las relaciones entre proporcionalidad directa y función lineal reside en considerar a la proporcionalidad como un modelo de función entre magnitudes que evoluciona linealmente, en el sentido de que para diferencias constantes en y le corresponden diferencias constantes en x . Segundo, que si bien es una función creciente, su crecimiento se caracteriza porque cuando se dobla (o se reduce a la mitad, o se multiplica por n) una de las variables, los valores de la otra se doblan, (o se reducen a la mitad o se multiplican por n). Tercero, porque si se suman dos valores de la variable independiente, el correspondiente valor de la variable dependiente es la suma de los valores que corresponden a los dos valores iniciales.

Es desde esta perspectiva que elaboramos un diseño de instrucción con el fin de lograr aproximar los estudiantes del grado séptimo de la Educación Básica a esta estructura conceptual. El acento colocado sobre el *aprendizaje de este contenido especifico*, determinó la elaboración de un diseño de instrucción para mostrar los procesos cognitivos logrados por estudiantes del séptimo grado a través de una secuencia de instrucción diseñada sobre tareas que involucran situaciones y problemas en este dominio.

Las componentes metodológicos para estudiar *el aprendizaje durante la instrucción* siguen la propuesta desarrollada por Heiberte y Wearne (1988) y Llinares - Sánchez (1992), 1): Identificar y definir el dominio de contenido, 2) identificar los procesos cognitivos que son claves para el desarrollo con éxito en este dominio, 3) diseñar una secuencia instruccional que promueva el uso de los procesos cognitivos y 4) evaluar los cambios cognitivos a través de estrategias empleadas en la resolución de determinadas tareas.

El propósito del diseño fue analizar las estrategias utilizadas por los estudiantes y cómo estas evolucionan en tareas de resolución de problemas. Para lograr este propósito se caracterizó en primer lugar, la secuencia instruccional para propiciar el cambio con base en estudios preliminares del dominio de contenido y del papel desempeñado por las representaciones en el proceso de aprendizaje. En segundo lugar, se identificaron los procesos cognitivos característicos del dominio y en tercer lugar se evaluaron los cambios cognitivos llevados a cabo durante el proceso de instrucción. El diseño instruccional se apoya como base fundamental en el lenguaje como instrumento cognitivo individual y colectivo que ayuda a la propia comprensión.

El propósito del estudio se concreta en los siguientes puntos:

a) Identificar las estrategias empleadas por estudiantes del séptimo grado de la Educación Básica para resolver tareas de la proporcionalidad como función lineal en el cuadro numérico y gráfico
b) Describir cómo dichas estrategias evolucionan durante la generación de diferentes tareas e interacciones con pares y el profesor
c) Determinar las características de la secuencia instruccional que propician los cambios en dichas estrategias

El estudio se realizó con 21 estudiantes del séptimo grado de la Educación Básica con un rango de edades entre los 12 y los 13 años. El diseño instruccional fue desarrollado durante 6 sesiones en un período de un mes de clase. Se utilizó una cámara de vídeo que incluyo audio para grabar las interacciones individuales y colectivas. En el desarrollo de los procedimientos de resolución individual se incluyó la solicitud de argumentar por escrito los procedimientos.

B.1. Identificación del Dominio de Contenido

Se realizaron estudios sobre el concepto de función como dependencia, su evolución histórica, así mismo un análisis didáctico del estado actual de los conceptos de función lineal y proporcionalidad directa en textos escolares y programa curricular vigente (García G., C. Serrano Espitia L., E. 1996, 1997).

Como resultado de este análisis se puede señalar que la proporcionalidad directa se presenta aislada tanto del concepto de función como de la función lineal pues a la primera se le ubica en el bloque de contenidos de las Magnitudes. Por su parte a la función lineal se le ubica en el Bloque de Álgebra y se define como $[f(x) = mx + b]$ y /o $y = K.x$ o por su gráfica, recta. Parecería entonces, que existen varias definiciones pues algunos textos a la funciones del tipo $[f(x) = mx + b]$ las denominan funciones afines o lineales, a las funciones de tipo $y = K.x$ función de proporcionalidad directa. Teniendo en cuenta esta aparente diversidad de significados es indispensable definir tanto los aspectos matemáticos de la función lineal como los de la función de proporcionalidad directa de tal forma que se muestre el isomorfismo entre ellas y sus diferencias con las funciones del tipo $[f(x) = mx + b]$.

La proporcionalidad directa esta enmarcada en la dependencia de la variación entre variables, siempre se considera multiplicativamente y se constata que la razón entre los valores correspondientes de y e x – $\frac{y}{x}$ – se mantienen constante. En general puede afirmarse que en las situaciones de variación caracterizadas por la proporcionalidad directa donde x varia directamente con y, e y varia directamente con x, es decir cuando x varia de x_1 a x_2, y lo hace de y_1 a y_2 es porque si x se multiplica por n, y se multiplica por n; si x se divide por n, y se divide por n. Lo que implica reconocer la existencia del operador escalar $\downarrow_{\times a}$ (entre cantidades de la mismas medidas) que caracteriza la variación directa; o la existencia del operador funcional $\xrightarrow{\times k}$ entre cantidades de medidas distintas. La ley que representa estos fenómenos tiene la estructura de la función lineal $y = kx$. El paso hacia la función se alcanza cuando las relaciones entre cantidades se asumen como relaciones entre variables,

$$
\begin{array}{ccc}
M_1 & & M_2 \\
1 & \xrightarrow{\times a} & a \\
b & \xrightarrow{\times a} & x
\end{array}
$$

Alenxandroff (1979) señala que el estudio de la dependencia de una cantidad a otra, puede considerarse como lineal si se caracteriza por:

- “la propiedad de proporcionalidad: la repercusión de cada factor por separado es proporcional a su valor;
- La propiedad de independencia: el resultado de una acción es igual a la suma de los resultados de las acciones por separado”. (1979,P. 57)

Lo que implica que la ley f cumple las propiedades de linealidad. Por su parte, Freudenthal (1983, p 185) resume la proporcionalidad establecida entre magnitudes identificando que

la invarianza de razones internas

y su equivalente

constancia de razones externas

significa: *linealidad de la aplicación*

Para caracterizar la proporcionalidad directa como función lineal es pues necesario el estudio de la variaciones entre variables para establecer el patrón de las expresiones analíticas que expresan la regla de cambio, pues como señala Sierpinska es en el estudio de "los procesos que transforman objetos en otros" (p. 7, 1992), de f, es decir " el proceso de generalización de la regla (Cotret S. R., 1991) el que determina como se transforma una variable en otra, mientras que la expresión analítica – $f(x) = k.x$–, sólo describe la naturaleza del cambio.

Por su parte en la teoría de las funciones, una función f lineal se define: "cuando a todo x se le hace corresponder el mismo x multiplicado por coeficiente m". La expresión analítica esta dada por: $f(x) = m.x$. Por su parte en el Álgebra Lineal las únicas transformaciones lineales que conservan la adición y la multiplicación respectivamente ($f(a+b) = f(a) + f(b)$; $f(k.x) = k.x$) son las funciones definidas de R en R, tomando como conjunto de escalares los reales, que cumplen estas propiedades son las de forma $f(x) = m.x$ para algún número real m.

Con base en estos estudios se selecciono como contexto de variación entre variables, las relaciones funcionales entre el número de vueltas que da un ciclista a velocidad constante (problemas 1 y 2) y el tiempo que gasta y también la distancia recorrida por un atleta que se desplaza a velocidad constante y el tiempo. La tareas se presentan: en un contexto numéricos pertenecientes al dominio de los números naturales y en un contexto gráficos.

B.2 Procesos cognitivos en contextos numéricos:

Su identificación se sustenta en investigaciones sobre la comprensión de la proporcionalidad (Harta 1981, Karplus et al. 1983, Vergnaud, 1983, Linares, 1992), se clasifican en:

Categoría	Situación problema		Descriptores
Modelo numérico aditivo	2 4 6 10	3 6 9 15	• Colocar los números que faltan, después de 6, 8 manteniendo la constante más 2 en la primera columna. El estudiante trabaja sobre la variación en la primera columna sin

			relacionarla con la segunda • Utilizar la regla horizontal siguiendo el modelo de los naturales, siguiente de 2 + 1 = 3 4 + 2 = 6 6 + 3 = 9 No relaciona la variación entre las variables.
Operador escalar	$_{x}a\downarrow$		• Coordinación de las variables y uso del operador escalar, establecimiento verbal del patrón de variación
Operador funcional	$\xrightarrow{x\,b}$		• Coordinación de las variables, uso del operador funcional, establecimiento verbal o en formula del patrón de variación.
Isomorfismo aditivo	$_{x}a\downarrow$ $\xrightarrow{x\,b}$ $f(a+b)=$ $f(a)+f(b)$		• Coordinación de variables; evolución hacia el Integración de operadores escalares y funcionales como patrones de variación. Uso del isomorfismo aditivo para predecir valores de variable

B.3 Procesos cognitivos del dominio en el contexto gráfico:

La comprensión de las gráficas ha sido descrita por Lehinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990) a través de actividades cognitivas como la interpretación y la construcción las que a su vez exigen actividades de predicción, clasificación, traslación. No son exhaustivas o mutuamente excluyentes, y pueden ser locales o globales, cualitativas o cuantitativas. La interpretación refiere la acción por la cual el estudiante da sentido o significado a un gráfico o ecuación funcional o situaciones de manera local o global. La construcción es la acción por la cual se genera una nueva representación, de la tabla a la gráfica, generar la ecuación que representa la gráfica, etc. Una y otra pueden atender a rasgos locales, globales, cualitativos o cuantitativos de la gráfica; según la clase de tareas demandan tipos de actividades – predicción, clasificación, traslación – y pueden también demandar acciones de interpretación y construcción simples o bastantes difíciles.

Precisamente porque los estudiantes con quienes se realiza el diseño no han tenido experiencia alguna en la interpretación o construcción de gráficas y porque diversas investigaciones han señalado como dificultades: la interpretación de la gráfica y la identificación de patrones de variación, hemos identificado las siguientes acciones cognitivas simples.

Reconocimiento de la gráfica desde sus características geométricas.

Lectura de la gráfica asociando los nombres de los ejes

Colocación de puntos en la gráfica.

La evolución de las estrategias se definió como:

Interpretación de la gráfica como representación de una dependencia de dos variables.

Lectura de patrones de comportamiento lineal

Interpolación y extrapolación,

Predicción del comportamiento de la gráfica a partir del patrón de variación

Traslación entre dos modos de representación, gráfica →tabla, gráfica – tabla → fórmulas tipo renacentista.

B.4 Características del Diseño de Instrucción

El diseño se articuló a través del trabajo individual y el trabajo en pequeños grupos en los que se favoreció el diálogo cooperativo, cada uno de estos trabajos se alterno con las discusiones de la clase entera en las que individualmente o cada grupo explicaba los procedimientos utilizados para resolver las tareas. La interacción del profesor se consideró esencial, puesto que las preguntas formuladas tenían el propósito de buscar generalización de estrategias, generación de posibles conflictos a través de la introducción de nuevos datos para modificar las estrategias planteadas y lograr su evolución. En general su característica fue la de proporcionar más autonomía a los estudiantes en el aprendizaje. La dinámica establecida llevó integrados aspectos de la evaluación, representados tanto por las preguntas formuladas por el profesor como por la reutilización de lo aprendido en situaciones más complejas (problema 3 de Función de proporcionalidad directa y problema 3 de Gráficas), estas situaciones permitieron determinar la forma en que se modificaron o no los procedimientos empleados para adecuarse a la estructura de la nueva situación.

B.5. Resultados

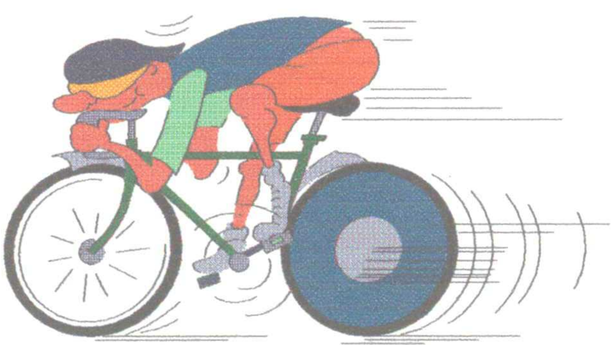
Los resultados que se presentan son una selección del análisis de una serie de protocolos que muestra la evolución de las estrategias empleadas por 6 estudiantes, tanto individual como en grupo de trabajo. En primer lugar se describen los protocolos correspondientes a las tareas de la situación "Hacia la función de proporcionalidad directa" y en segundo lugar los correspondientes a las tareas de Gráficas: Patrones y crecimientos

B.5.1 Hacia la función de Proporcionalidad Directa, Protocolos

Las tareas numéricas que involucran la evolución de la estrategias para resolver la proporcionalidad numérica, tal como se ha descrito en el apartado B, están caracterizadas por situaciones en las cuales la relación entre variables constituye la primera hipótesis y porque de acuerdo a los datos contenidos en cada una de las columnas se favorece o no el uso de una u otra de las estrategias descritas en el citado apartado.

Un entrenador tan sólo registró los siguientes datos durante un entrenamiento de ciclismo de uno de sus pupilos, quien mantuvo el mismo ritmo de carrera.

Nº de Vueltas	Tiempo minutos.
3	12
	20
7	
	36
35	



a. Ayúdele a completar la tabla. Explique cómo lo hace.

En razón a esta consideración y al tipo de trabajo realizado individual, grupal y colectivo se describen las estrategias utilizadas.

Procedimientos individuales: *Ana al resolver la tabla explica su procedimiento a través de la división : primero dividí 12 ÷ 3 = 4 y me di cuenta que en 4 minutos hace una vuelta de manera que multiplique 4 por el número de vueltas 20 minutos 5 vueltas; 40 minutos 10 vueltas; 60 minutos 15 vueltas; 80 minutos 20 vueltas; 100 minutos 25 vueltas.*

Por su parte, Jimena explica, tuve en cuenta que en la primera vuelta se demoro 12 minutos entonces en cada vuelta se demora 4 minutos.

Enrique señala: para poder saber los datos de tiempo se coge un numero que multiplicado por 4 de el resultado que se encuentra en la tabla y para saber los datos de número de vueltas se coge un número que dividido en 4 de el resultado que se en cuentra en la tabla.

Juan :en cada vuelta se gasta 4 minutos 3·.4 = 12; 20 ÷ 4 = 5 ; 7.4= 28; 36÷ 4=9; 35.4 = 140

Se evidencia el uso de estrategias locales, constatación de la existencia del operador entre pares de valores

Una de las características de esta tarea son los datos, pues con ellos se buscaba generar como procedimiento, el uso del operador funcional $\xrightarrow{x^b}$ para relacionar las dos variaciones. Este supuesto se hacía con base en el conocimiento que los estudiantes de este nivel deben tener sobre propiedades factoriales del número.

Posterior al trabajo individual, se desarrolló la discusión en colectivo de la clase. En un primer momento la estrategia común defendida por la mayoría era la necesidad de "reducir a la unidad" introducida en la enseñanza en los problemas de proporcionalidad directa, sin embargo las argumentaciones de Enrique producen en el grupo modificaciones en cuanto argumenta que *es más fácil pensar en un número que multiplicado por 3 de 12*, aunque el procedimiento es explicado localmente, funciona aparentemente para este par de valores. A lo cual responde Ana *que no es fácil* por cuanto *no se ve para todos los datos*. Lo que implícitamente esta argumentando Ana, es la dificultad para deducir la generalización del operador funcional pues la disposición de los datos en la tabla no lo permiten. Sin embargo el grupo acepta la estrategia y con ella abordan la solución de la siguiente situación:

Problema 2

Los registros tomados por el entrenador para otro pupilo quien también mantuvo el mismo ritmo de carrera son :

Nº de Vueltas	Tiempo minutos

a. ¿Cuántos minutos gasta para dar cinco vueltas ?. Explique su respuesta.

2	3
4	6
6	9
10	15

b. ¿ En doce minutos cuántas vueltas ha dado ?. Explique su respuesta.
c : Con sólo los datos de la tabla calcule : ¿Cuánto tiempo gastaría en recorrer veinticuatro vueltas ?. Explique su respuesta.

Pero los datos de la tabla no permiten apoyarse en este procedimiento. La primera estrategia reconocida como válida por Ana, Jimena y Juan corresponde al modelo numérico. Para Ana y Jaime la estrategia sirve por cuanto los datos de la tabla lo ratifican

$$2 + 1 = 3$$
$$4 + 2 = 6$$
$$6 + 3 = 9$$
$$8 + 4 = 12$$
$$10 + 5 = 15$$

De esta manera se calcula primero la respuesta a la pregunta c. Por su parte Jimena utiliza al estrategia de las diferencias constantes entre las columnas al argumentar las *vueltas varían de dos en dos y la del tiempo de 3 en 3* y al igual que sus compañeros calcula primero la respuesta correspondiente a las veinticuatro vueltas. Enrique acepta como válido este procedimiento y lo utiliza para responder la pregunta **a,** *gasta 7.5 minutos porque entre el 4 y el 6 estaría el 5 como a 4 se le suman 2 para dar 6 minutos y como a 6 se le suma 3 para que de 9 a 5 se le suman 2.5 porque es la mitad de lo que se le suma a 4 y a 6.* El procedimiento utilizado para resolver la pregunta **b** lo explica a sus compañeros de la siguiente forma: *en doce minutos ha dado 8 vueltas porque en el número de vueltas voy de dos en dos y cuando llego a ocho coincide que el tiempo de minutos es 12.*
La situación altera la estructura de las situación manejada y aceptada como válida. Cuando se sucede la validación con el colectivo de la clase, una mayoría coincide con el procedimiento de las diferencias constantes y la respuesta a la pregunta **a** queda argumentada como una estimación en los siguientes términos *gasta entre 5 y 8 minutos.* Pero Jeimy argumenta que gasta exactamente 7 ½ porque 3 ÷ 2 = 1 ½ y al multiplicar 11/2 por 5 = 7 1/2, lo que genera por parte del profesor la pregunta sobre si se cumple para todo par de valores de la tabla. Pero Jeymi argumenta *para saber cuanto tiempo gasta en recorrer veinticuatro vueltas no se necesita porque se sabe que 10 vueltas se dan en 15 minutos, 20 vueltas en 30 minutos y lo que me faltaba es decir 1 ½ (minuto*

y medio) lo multiplique por 4 porque son 24 vueltas y me dio 6 minutos y adicione 30 + 6 y me di cuenta que gasta 36 minutos en dar 24 vueltas.

La argumentación de Jeimy actúa en la clase a manera de un conflicto, pues varios estudiantes se dedicaron a comprobar su validez ensayando con otros datos. La evolución de la estrategia hacía el isomorfismo aditivo es muy rápida como lo manifiestan las investigaciones (Harte 1989, Llinares ,1992), aunque se construya para segmentos de valores, pues el hecho de acercarse a la respuesta mediante las relaciones aditivas en cada columna es vista como un caso particular de la estrategia elaborada del isomorfismo aditivo.

Como se deduce este tipo de actividad, comunicar, da la posibilidad de poner de manifiesto la existencia de diferentes niveles de elaboración en las estrategias empleadas tanto individualmente como en grupos de trabajo. Lo que da pie a que los mismos compañeros produzcan conflictos. El profesor se encuentra en el tablero, organizando la discusión, resumiendo las diferentes estrategias y generando preguntas relativas a la generalidad de las estrategias planteadas en el sentido de su efectividad ante las condiciones estructurales de las diferentes tareas. La eficacia de una u otra estrategia queda vinculada a las características particulares de cada situación pues depende de los datos. Sin embargo la estrategia aceptada por el grupo, es la de encontrar el operador funcional a través de la división entre cantidades distintas.

La evolución de las estrategias se evaluó a través de la solución a los problemas 3 y 4. (Anexo). En el grupo de trabajo de Ana, Jimena, Juan y Enrique no hubo discusión alguna para establecer el operador funcional correspondiente y ratificar la generalidad y eficacia de la estrategia, Ana propuso al grupo datos no contenidos en la tabla. Lo que finalmente permitió que se aceptará como válido el siguiente argumento: *la expresión es que la primera columna puede pasar a la segunda multiplicada por 25.* Pero al igual que en las otras situaciones, el papel determinante desempeñado por la comunicación en el colectivo contribuyó a enriquecer las expresiones prealgebraicas que determinan la regla en este tipo de tareas. La expresión formulada por el grupo de Jeimy *multiplica el número de fotocopias por el valor de una que es 25* de nuevo fue considerada como válida y la que generaliza la situación.

La solución al problema 4, fue elaborada con el objetivo de constatar las características de la función lineal, en diferencia con la función afín. Sin embargo la situación del costo por el servicio como es el caso de Celullama, presentó dificultades a los estudiantes puesto que desconocían esta situación real. Aunque los datos de la tabla de Celurápida, facilitan el uso de cualesquiera de los procedimientos descritos, podemos afirmar con base en el utilizado por el grupo de Ana, que el operador funcional fue utilizado para establecer la regla y para generar las expresiones retóricas: *celurápida: se multiplica el número de llamadas por 800, celullama: se multiplica el no de llamadas por 600 y después se le suma 6.000 que era el cargo y da el costo de la llamada.*

Resaltamos la evolución de las estrategias desde una eficacia local, entre pares de valores, o en la localización punto por punto del operador a una eficacia más general, lo que corresponde a una comprensión más global de este tipo de tareas. Así mismo se destaca la adaptación de las estrategias empleadas a las características estructurales de las tareas, lo que revela un cambio cognitivo de los estudiantes. Lo que nos permite afirmar que la evolución de las estrategias empleadas viene definida por la correspondencia entre las características estructurales de la tarea y las limitaciones inherentes a una estrategia particular. Esta afirmación se deduce del cambio de estrategias que produce la tarea del problema 2.

Las estrategias locales, utilizadas en la solución del primer problema son necesarias para la construcción de estrategias generales

Una primera conclusión es la de resaltar los aspectos dinámicos del aprendizaje favorecidos por las características de los diseños de instrucción. Este diseño, fue elaborado para favorecer en primer lugar la búsqueda de soluciones desde las estrategias de los estudiantes, como es el caso de los datos del problema 1. Así mismo el papel de las verbalizaciones, orales y escritas, es determinante puesto que apoyan el proceso de reconceptualización al mismo tiempo que jalonan conflictos cognitivos entre los estudiantes.

B.5.2 Gráficas: patrones y crecimiento, Protocolos

El protocolo describe las estrategias utilizadas por cada uno de los miembros del grupo de Ana y en su confrontación con el colectivo de la clase. Siendo conscientes de las dificultades que presenta la interpretación de la gráfica de una función y además de las competencias que los estudiantes participantes en el estudio poseen para enfrentarse a este tipo de tareas, el diseño de instrucción centro más la intención de generar el conflicto a través del trabajo individual - colectivo.

En cuanto a la interpretación de lo que representa la gráfica Ana, Juan y Jimena coinciden en afirmar que *representa cómo recorre t y d el atleta*. Jimena es más explícita pues afirma que representa *el tiempo que gasta y la distancia que recorre el atleta*. Para Enrique, *representa el ritmo que lleva*. Desde este punto de vista, se puede afirmar que a pesar de que los estudiantes no han sufrido el proceso formal de la enseñanza de la lectura e interpretación de gráficas cartesianas, ni el aprendizaje de la sintaxis del sistema cartesiano, sí poseen intuitivamente aproximaciones a este tipo de elaboraciones. Sin embargo cuando se les solicita trabajar sobre la gráfica como es el caso de las preguntas **d,** cada uno de los estudiantes calcula la distancia recorrida utilizando la tabla, por ejemplo, Ana calcula el operador funcional en la tabla, 300 luego la multiplica por 12 da la respuesta y coloca el 12 en la gráfica y el correspondiente valor en **Y.** Este procedimiento representa el comportamiento de la clase en general.

En lo referente a la lectura de los patrones generales de comportamiento lineal formulados en la situación problema 2, el grupo de Ana coincide en expresar *que la distancia aumenta en cantidades iguales y el tiempo también aumenta en cantidades iguales*. Con esta afirmación se revela una aproximación informal al tipo de crecimiento que caracteriza este patrón de comportamiento, pues comprenden que cambios en una de las variables dan lugar a cambios en la otra, aunque este poco cargado de simbolismo Sin embargo, la dificultad intrínseca que comporta este tipo de tareas aunado al desconocimiento por parte de los estudiantes de los prerrequisitos descritos y también a las limitaciones del tiempo prescrito para realizar la experiencia no permitieron un acercamiento más significativo a la comprensión del patrón para construir un acercamiento al modelo matemático funcional.

Estas dificultades se explicitaron más al resolver la pregunta **d** (Prolongue la gráfica: qué información adicional se obtiene ?)puesto que la pregunta buscaba generalizar el comportamiento gráfico de este tipo de patrón, pues identifica la función lineal, $y = Kx$ y la diferencia de la función afín $y = mx + b$. En el grupo de Ana solo Enrique respondió *pasa por cero*. Este hecho, junto al escaso numero de soluciones gráficas dadas a la situación de extrapolación e interpolación constata el escaso trabajo sobre tareas gráficas que se propone en la escuela, pues las respuestas cuyas soluciones implican procesos aritméticos (preguntas b y c del problema 4) son respondidas mayoritariamente.

Ante estas dificultades el profesor intervino permanentemente, en contraste al número de intervenciones realizadas en las situaciones numéricas, debía animar constantemente la discusión para centrar la comprensión del patrón del comportamiento gráfico.

Teniendo en cuenta las restricciones escolares de los estudiantes y de la experimentación descritas al inicio, se puede afirmar la evolución de las estrategias se dio desde una interpretación local a una interpretación general del comportamiento del patrón gráfico, en este tipo de relaciones funcionales. La variable contenido innovativo se convirtió en un obstáculo didáctico, puesto que las tareas propuestas eran totalmente nuevas, lo que implica una mayor trabajo y por tanto mayor tiempo para el desarrollo de los prerrequisitos.

Reflexión Final y Conclusiones

Teniendo en cuenta que nuestro compromiso en esta investigación responde desde el principio, a la necesidad de conjugar la dimensión teórica y práctica hemos otorgado prioridad al contexto en que se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, con toda su riqueza y la multiplicidad de variables que lo conforman. Es también en este sentido que la investigación ha priorizado los procesos constructivos que desarrollan los alumnos en torno a los conceptos de función y función lineal.

En consideración a este compromiso, la investigación se desarrollo en las siguientes dos etapas. La primera, corresponde a la modalidad teórica, donde centramos nuestra atención en los análisis teóricos de los respectivos campos conceptuales de los objetos de estudio. Para abordar los aspectos estructurales del concepto de función, nos apoyamos en el análisis histórico epistemológico, lo que nos permitió elaborar una serie de supuestos, delimitar el problema de investigación y construir la concepción de función para el diseño. Así mismo nos permitió imbricar la interdependencia entre los sistemas se representación característicos de esta concepción, establecer las dificultades y los objetos matemáticos asociados. En lo que respecta al análisis teórico del concepto de función lineal, abordamos el estudio del campo conceptual.

Como parte esencial de esta primera etapa reseñamos los análisis didácticos realizados en torno a los textos y programa curricular vigente, puesto que hacen parte esencial del contexto. A nivel cognitivo nos apoyamos de un lado, en el estudio de las concepciones cognitivas de los estudiantes y en el estudio del conocimiento profesional del profesor, por cuanto su conocimiento es indispensable para determinar la complejidad de variantes presentes cuando se pretende modificar o innovar la práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Si bien a nivel cognitivo para el caso de la función lineal no elaboramos este tipo de estudios, sí nos apoyamos en resultados de investigación sobre los procesos cognitivos asociados a este tipo de contenido.

Como resultado de la segunda etapa, la práctica, podemos señalar la viabilidad de la propuesta, si bien se han de tener en cuenta las siguientes dificultades

- Es necesario modificar substancialmente las representaciones que prioriza la actual enseñanza de las matemáticas para dar cabida al uso de sistemas de representación analógicos.
- Es también necesario desde la primaria desarrollar en los estudiantes las nociones de variable y el estudio de la variación a través de procesos aritméticos y de tareas donde la regularidad y los patrones sean el objeto central de estudio.
- A nivel de los profesores de matemáticas se requiere con urgencia cualificar el conocimiento profesional por cuanto este involucra las reflexiones sobre la didáctica de las matemáticas como un campo de actuación profesional y permite a

los profesores participar con autonomía critica en el diseño y desarrollo de las matemáticas escolares.

Por lo que respecta a la experimentación y a la información obtenida sobre el proceso constructivo de los estudiantes, compartimos especialmente con Hans Freudenthal el segundo y el tercer problema de los once fundamentales de la Educación Matemática En especial hemos estado motivados por "aprender a observar los procesos de aprendizaje", observar según Freudenthal es "analizar, pero no promediar o aplicar otros procedimientos estadísticos ni encajar los datos de la observación a modelos preconcebidos de la psicología evolutiva" Hemos aprendido a observar los procesos de aprendizaje, cómo evoluciona la comprensión, qué potencialidades pueden presentarse en el desarrollo de la clase. Hemos podido llevar a cabo este proceso gracias al estudio histórico y al estudio de los aspectos matemáticos que determinan un campo conceptual.

Uno de las confirmaciones que aporta este trabajo es la importancia de la interacción que tiene lugar en la comunidad de la clase, pues a través suyo se generan conflictos cognitivos jalonados por los mismos estudiantes. Así mismo la interacción del profesor es vital. siempre y cuando posea una amplia concepción sobre el campo conceptual que este trabajando.

Hacemos también referencia a ciertas insatisfacciones que nos deja el desarrollo de la investigación, como el hecho de querer abarcar un amplio espectro de los aspectos relativos a la comprensión de los conceptos y de pretender obtener al máximo información que nos asegurará de manera anticipada el control estricto de las situaciones, lo que nos llevó a dedicar un tiempo a la discusión que ahora consideramos excesivo. De igual forma el haber considerado que la introducción innovativa de contenidos en el aula podía realizarse en un lapso de tiempo limitado.

Para concluir queremos indicar posibles puntos de avance en esta línea de investigación, los cuales comienzan a ser desarrollados por el grupo.

Seria interesante a raíz de las redes conceptuales construidas en esta investigación plantearse qué cabida tiene este tópico para configurar el Bloque de las Funciones en los Lineamientos Curriculares

Es necesario imbricar el estudio de la función como dependencia y sus modelos en un campo conceptual como el Cálculo, por cuanto ésta constituye uno de sus objetos básicos. Es también necesario avanzar sobre el estudio en la transición procesual/ estructural del concepto.

Anexo 1.

LAS VACACIONES Y LOS NUEVOS AMIGOS

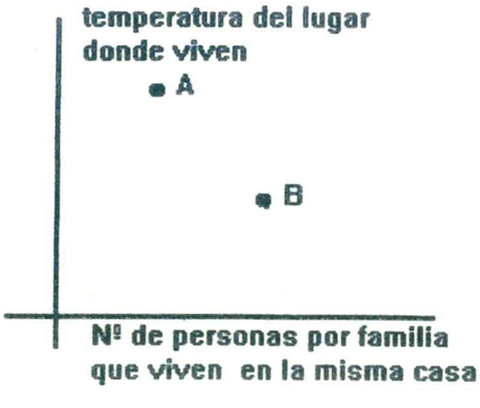
Alvaro y Beatriz se conocieron durante las vacaciones de Diciembre y se hicieron amigos. ¿Quiénes son?, ¿Donde viven?, ¿Cómo son sus familias?, son preguntas que se pueden contestar al leer la información presentada en las siguientes fotos y diagramas.

Fotos de las casas

Alvaro

Beatriz

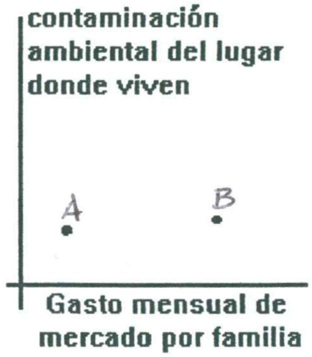
La siguiente gráfica informa sobre algunas características del lugar donde viven Alvaro y Beatriz. Analícela y conteste las preguntas

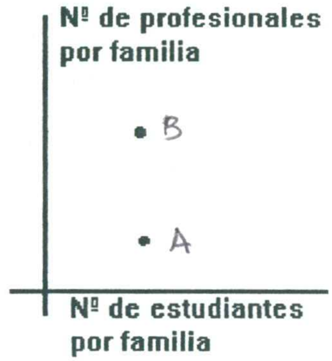


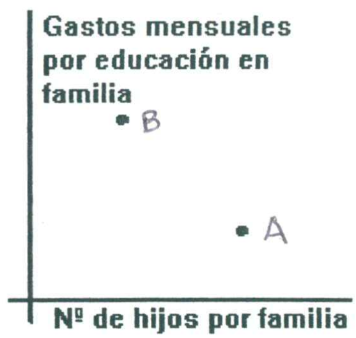
- ¿Viven en ciudades diferentes?
- ¿Quién viven en clima caliente?

- ¿Tiene Beatriz más hermanos que Alvaro?
- ¿Cómo es la casa de cada uno?
- ¿Cuál de las familias gastará más en Educación?
- ¿Son Beatriz y Alvaro estudiantes?

Es posible que algunas de las preguntas anteriores no tengan aun respuesta. A continuación se presentan otros gráficos de los cuales se puede obtener información.

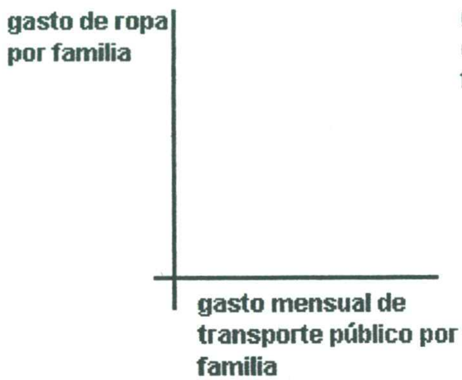






- ¿Es Alvaro un profesional?
- ¿En qué se parecen las ciudades en que viven Alvaro y Beatriz?
- ¿En cuál de las familias hay menos estudiantes?
- ¿A cuál de estas familias se parece su familia?
- ¿Es cierto que Beatriz es hija única?
- ¿En caso de que le propusieran visitar a Alvaro y a Beatriz, a cuál visitaría?
- ¿Serán los abuelos de Beatriz profesionales?

- En las siguientes gráficas debe situar a Alvaro y Beatriz, teniendo en cuenta toda la información que ha obtenido.



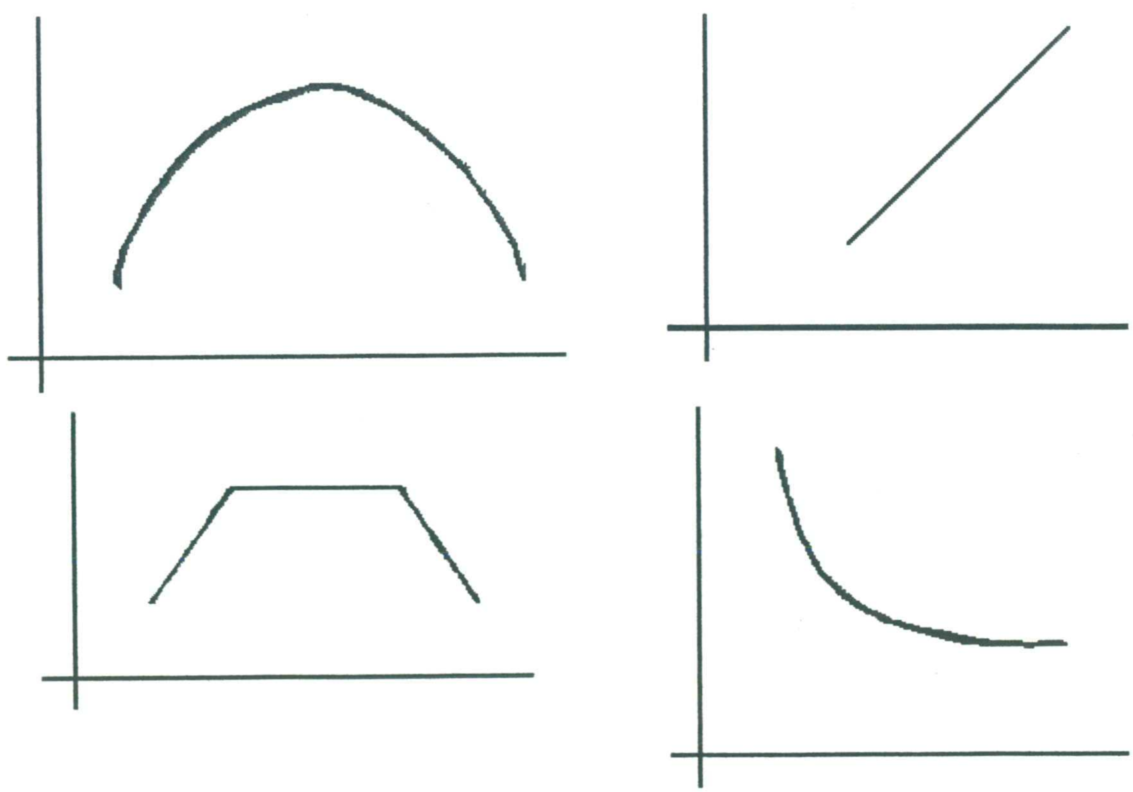
- Describa y explique cada gráfica y sus respuestas.

SITUACIONES DE VARIACION Y DEPENDENCIA

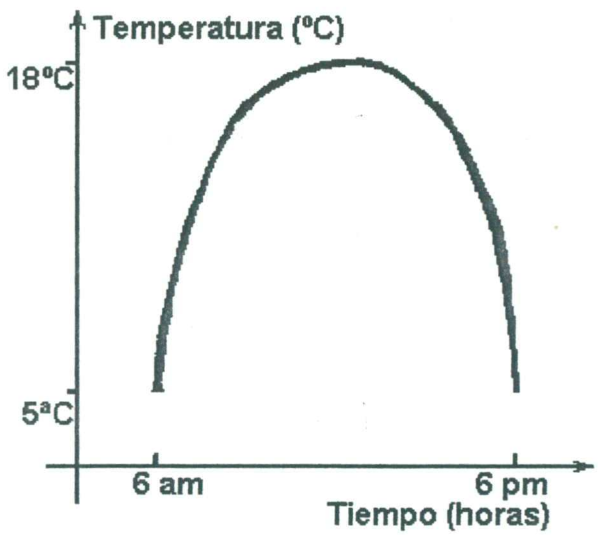
La siguiente tabla relaciona la forma cómo varía la temperatura el día en Bogotá

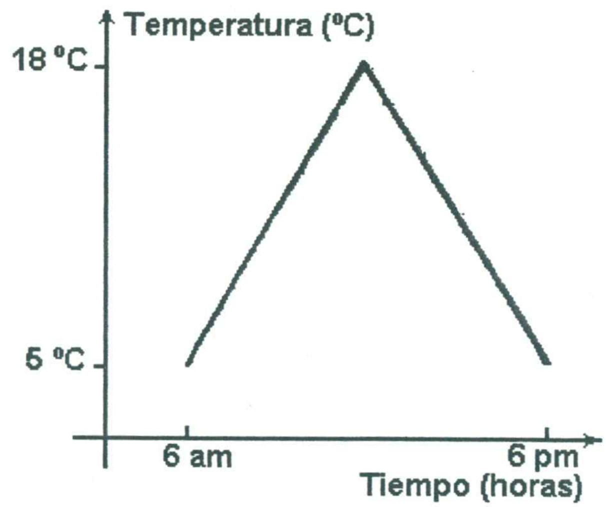
Hora	t °C
6 a.m.	5
8 a.m.	
4 p.m.	7
6 p.m.	

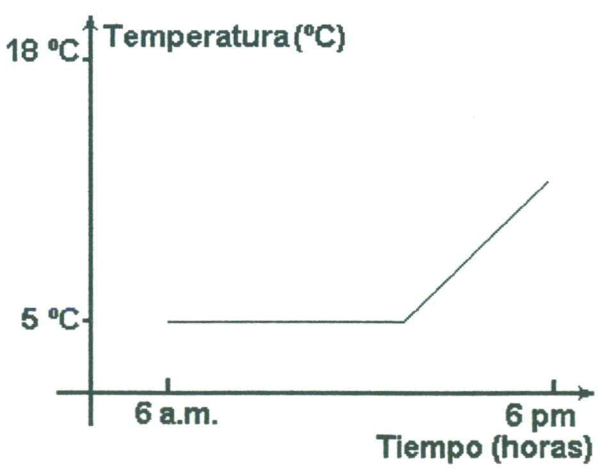
1. Entre las 8 a.m. y las 12 m. la temperatura ¿ aumentará o disminuirá ?. Explique
2. ¿En qué horas la temperatura alcanza su máximo valor?
3. Identifique en las siguientes gráficas ¿ cuál de ellas representa mejor la respuesta a la pregunta 2 ?

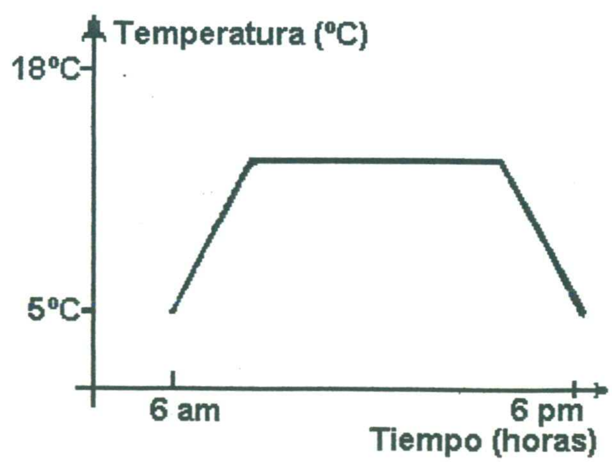


4. Complete la tabla colocando posibles temperaturas para cada dos horas.
5. ¿Entre qué valores varía la temperatura y entre qué valores el tiempo?
6. ¿A medida que avanza la mañana qué le sucede a la temperatura?
7. ¿A medida que transcurre la tarde, qué le ocurre a la temperatura?
8. Identifique en las siguientes gráficas ¿cuál representa la variación de la temperatura a lo largo de un día en Santafé de Bogotá ? :





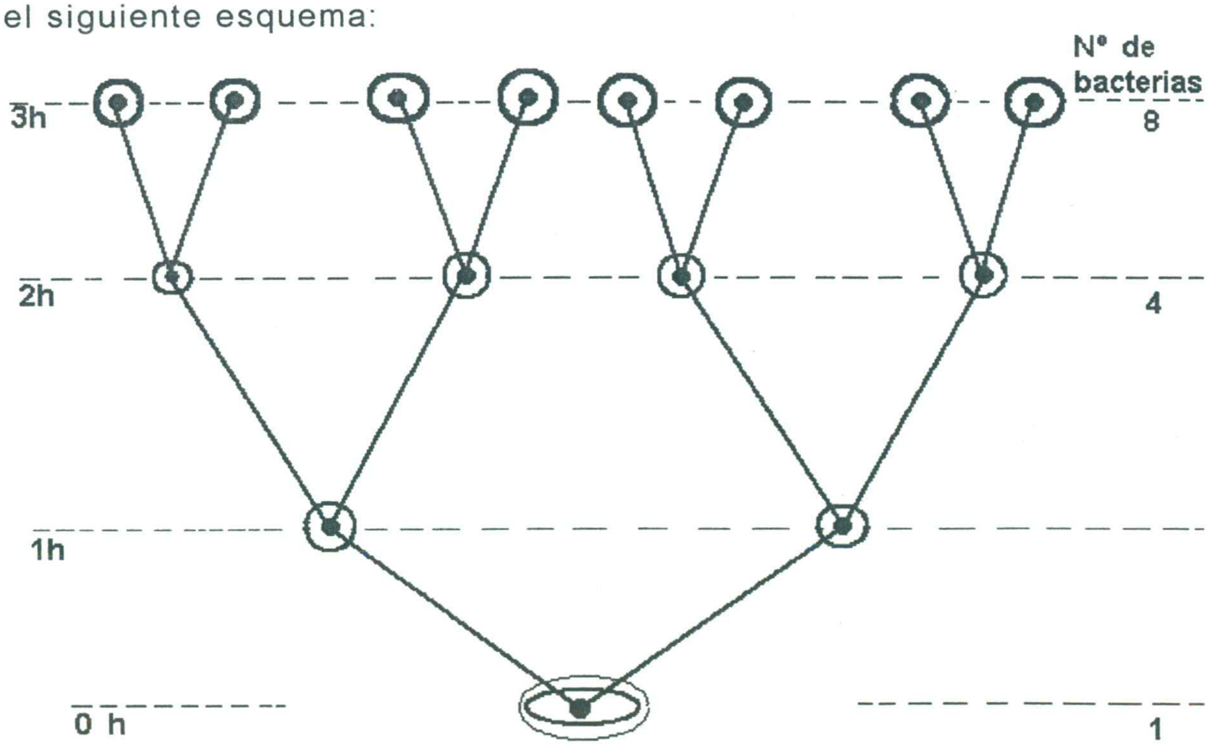




9. Elabore una gráfica que represente la variación de la temperatura en un día en la ciudad de Cartagena de Indias.

LA EXPANSION DEL COLERA

A una cierta temperatura una bacteria de cólera se reproduce según el siguiente esquema:



1. En el diagrama represente cuántas bacterias se han reproducido a las seis horas.
2. ¿Entre la primera y la tercera hora se aumenta o disminuye el número de bacterias?. ¿Entre la segunda y la cuarta hora se aumenta o se disminuye el número de bacterias?
3. Transcurridas 24 horas qué se puede afirmar del número de bacterias reproducidas.
4. ¿De qué depende la reproducción de la bacteria del cólera?